Editora Bernoulli

MATEMÁTICA

Volume 01

Sumário - Matemática

Frente A

Frente B

Frente C

Frente D

Frente E

MATEMÁTICA

Raciocínio lógico

MÓDULO 01 FRENTE A

Lógica (do grego *logos*) significa pensamento, ideia, argumento. Ela tem o objetivo primordial de garantir uma linha de pensamento que chegue a conhecimentos verdadeiros.

Podemos, então, dizer que a lógica nos ensina a lidar com os argumentos, raciocinando corretamente para não chegarmos a conclusões equivocadas. Estudaremos neste módulo alguns princípios complementares da lógica importantes para o estudo da Matemática.

PROPOSIÇÕES

Proposição é uma declaração (afirmativa ou negativa) que pode ser classificada como verdadeira ou falsa.

São proposições:

i) "A Bahia fica na região Nordeste."
É uma proposição verdadeira.

ii) "O dobro de três não é seis."
É uma proposição falsa.

iii) "Todo triângulo é equilátero."
É uma proposição falsa.

Não são proposições, pois não podemos classificar como verdadeiras ou falsas:

i) "Antônio gosta de salada?"
É uma oração interrogativa.

ii) "Thiago, vá estudar para a prova de Biologia."
É uma oração imperativa.

iii) "2x + 3 = 1"
É uma equação.

CONECTIVOS

A partir de proposições simples, podemos formar proposições mais complexas, por meio do emprego de símbolos lógicos, denominados conectivos. As proposições formadas com conectivos são chamadas proposições compostas.

Conectivo **e**

Pondo-se o conectivo **e** (representado pelo símbolo $\wedge$) entre duas proposições simples **A** e **B**, obtemos uma proposição composta. Essa nova proposição é dita conjunção das proposições originais **A** e **B**, ou seja, é a proposição em que se declaram ao mesmo tempo **A** e **B**.

A conjunção é verdadeira quando **A** e **B** forem ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $A \wedge B$ é falsa.

Exemplo 1

A: Cinco é ímpar. (verdadeira)
B: A água é incolor. (verdadeira)
$A \wedge B$: Cinco é ímpar e a água é incolor. (verdadeira)

Exemplo 2

A: Belo Horizonte é maior do que Goiânia. (verdadeira)
B: O Rio de Janeiro é maior do que São Paulo. (falsa)
$A \wedge B$: Belo Horizonte é maior do que Goiânia e o Rio de Janeiro é maior do que São Paulo. (falsa)

Conectivo **ou**

Pondo-se o conectivo **ou** (representado pelo símbolo $\vee$) entre duas proposições simples **A** e **B**, obtemos uma proposição composta. Essa nova proposição é denominada disjunção das proposições originais **A** e **B**, ou seja, é a proposição em que se declara verdadeira pelo menos uma das proposições **A** e **B**.

A disjunção é verdadeira quando ao menos uma das proposições **A** e **B** for verdadeira; somente se ambas forem falsas é que será falsa.

Exemplo 1

A: Aranhas são mamíferos. (falsa)
B: Cobras são répteis. (verdadeira)
$A \vee B$: Aranhas são mamíferos ou cobras são répteis. (verdadeira)

Exemplo 2

A: O céu é azul. (verdadeira)
B: Triângulos não possuem diagonais. (verdadeira)
$A \vee B$: O céu é azul ou triângulos não possuem diagonais. (verdadeira)

Implicação

As palavras **se** e **então**, com as proposições **A** e **B** na forma "se **A**, então **B**", determinam uma nova proposição, denominada condicional de **A** e **B**. Essa proposição, que também é chamada de implicação, indica-se por $A \Rightarrow B$, e pode ser lida de diversas maneiras, como:

i) Se **A**, então **B**.
ii) **A** implica **B**.
iii) **A** é condição suficiente para **B**.
iv) **B** é condição necessária para **A**.

Exemplo 1

A: Pedro foi ao Ceará.
B: Pedro foi ao Nordeste.
$A \Rightarrow B$: Se Pedro foi ao Ceará, então Pedro foi ao Nordeste. (verdadeira)
$B \Rightarrow A$: Se Pedro foi ao Nordeste, então Pedro foi ao Ceará. (falsa)

Exemplo 2

A: Mariana passou no vestibular do ITA.
B: Mariana estudou Matemática.
$A \Rightarrow B$: Se Mariana passou no ITA, então ela estudou Matemática. (verdadeira)
$A \Rightarrow B$: Estudar Matemática é condição necessária para passar no ITA. (verdadeira)

A condicional $A \Rightarrow B$ é falsa somente quando **A** é verdadeira e **B** é falsa; caso contrário, $A \Rightarrow B$ é verdadeira.

Observe que, se **A** for falsa, então a implicação será sempre verdadeira. Por exemplo:

- falsa ⇒ verdadeira, temos conclusão verdadeira.

  (5 é múltiplo de 3) ⇒ (5 > 3) (verdadeira)

- falsa ⇒ falsa, temos conclusão verdadeira.

  $(3 = 2) \Rightarrow (6 = 4)$ (verdadeira)

A ideia é que se partirmos de uma proposição falsa podemos concluir qualquer coisa. Mas, a partir de uma proposição verdadeira, temos de deduzir outra verdadeira.

A recíproca de uma implicação $A \Rightarrow B$ é a implicação $B \Rightarrow A$.

Exemplo 3

A: O triângulo ABC é equilátero.
B: O triângulo ABC é isósceles.
$A \Rightarrow B$: Se o triângulo ABC é equilátero, então é o triângulo ABC isósceles. (verdadeira)
$B \Rightarrow A$: Se o triângulo ABC é isósceles, então é equilátero. (falsa)

Equivalência

Equivalência entre as proposições **A** e **B** é a proposição indicada por $A \Leftrightarrow B$, pela qual se declara, ao mesmo tempo, que $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$.

Portanto, **A** é a condição necessária e suficiente para **B**, e vice-versa.

QUANTIFICADORES

Já vimos que sentenças do tipo $x + 2 = 5$ (ou seja, sentenças com variáveis) não são proposições, já que não são verdadeiras ou falsas. Por isso, essas sentenças são chamadas de sentenças abertas. Há duas maneiras de transformar sentenças abertas em proposições: atribuindo valores específicos às variáveis ou utilizando um dos dois tipos de quantificadores que veremos a seguir.

Proposições envolvendo quantificadores também são chamadas de proposições quantificadas.

Quantificador universal

O quantificador universal é indicado pelo símbolo **∀**, e deve ser lido "qualquer que seja", "para todo" ou "para cada".

Exemplo

Se **x** denota um número real, temos as proposições:

i) $\forall x: 2^x > 0$ (verdadeira)

ii) $\forall x: x + 3 = 1$ (falsa)

Se **x** denota um estudante, podemos construir a proposição:

∀ x: **x** é inteligente. (falsa)

Escrevendo essa proposição em liguagem corrente, temos: "todo estudante é inteligente".

Quantificador existencial

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo **∃**, e deve ser lido "existe", "existe ao menos um" ou "existe um".

Exemplo

Se **x** denota um número real, temos as proposições:

i) $\exists x: x + 2 = 5$ (verdadeira)

ii) $\exists x: x^2 + 1 < 0$ (falsa)

Se **x** denota um estudante, podemos construir a proposição:

∃ x: **x** é inteligente. (verdadeira)

Escrevendo essa proposição em linguagem corrente, temos: "existe estudante inteligente".

OBSERVAÇÃO

Há também um tipo de quantificador, indicado pelo símbolo **∃!**, que significa "existe um único".

NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES

Negação de proposições simples

A negação de uma proposição **A** é simbolizada por **~A**, que se lê "não **A**" ou, simplesmente, "negação de **A**". Assim, se **A** é falsa, então **~A** é verdadeira, e, se **A** é verdadeira, então **~A** é falsa. Também podemos dizer que negar uma proposição acarreta inversão de seu valor lógico.

OBSERVAÇÃO

Para qualquer proposição **A**, é claro que **~(~A)** e **A** têm o mesmo valor lógico.

Exemplo

A: 4 é primo. (falsa)

~A: 4 não é primo. (verdadeira)

Negação de proposições compostas

Para negarmos uma conjunção ou disjunção, devemos inverter o valor lógico de cada proposição e trocar "**e**" por "**ou**", e vice-versa.

i) A negação da conjunção (**A** e **B**) é a disjunção (~A ou ~B).

ii) A negação da disjunção (**A** ou **B**) é a conjunção (~A e ~B).

Em símbolos, escrevemos:

$\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow (\sim A) \vee (\sim B)$

$\sim(A \vee B) \Leftrightarrow (\sim A) \wedge (\sim B)$

Exemplo

A: Marcos trabalha. (verdadeira)

B: Marcos joga tênis. (falsa)

$A \vee B$: Marcos trabalha ou joga tênis. (verdadeira)

$\sim(A \vee B)$: Marcos não trabalha e não joga tênis. (falsa)

Negação de "todo"

Para tornarmos falsa a proposição "todo professor é alto", devemos encontrar pelo menos um professor que não é alto. Portanto, seja a afirmação:

A: Todo professor é alto. (falsa)

Sua negação é:

~A: Existe (pelo menos um) professor que não é alto. (verdadeira)

~A: Nem todo professor é alto. (verdadeira)

Negação de "nenhum"

Analogamente, para negarmos a proposição "nenhum homem é fiel", devemos encontrar pelo menos um homem que seja fiel. Temos, então:

A: Nenhum homem é fiel. (falsa)

~A: Existe (pelo menos um) homem fiel. (verdadeira)

~A: Algum homem é fiel. (verdadeira)

Negação de "algum" ou "existe"

A: Existe cachorro inteligente. (falsa)

Se houver um ou mais cachorros inteligentes, a proposição anterior é verdadeira. Para torná-la falsa, não pode haver cachorro inteligente. Portanto, a negação da proposição **A** é:

~A: Nenhum cachorro é inteligente. (verdadeira)

~A: Todo cachorro não é inteligente. (verdadeira)

CONTRAPOSITIVA DE UMA IMPLICAÇÃO

Definição

Dada uma implicação $A \Rightarrow B$, chamamos de contrapositiva dessa implicação a proposição $\sim B \Rightarrow \sim A$.

Uma implicação qualquer e sua contrapositiva sempre têm o mesmo valor lógico, como podemos perceber nos exemplos seguintes.

Exemplo 1

A: Jorge trabalha. (verdadeira)

B: Jorge estuda. (falsa)

$A \Rightarrow \sim B$: Se Jorge trabalha, então não estuda. (verdadeira)

$B \Rightarrow \sim A$: Se Jorge estuda, então não trabalha. (verdadeira)

Exemplo 2

A: Todo número primo é ímpar. (falsa)

B: Nenhum número par é primo. (falsa)

$A \Rightarrow B$: Se todo número primo é ímpar, então nenhum número par é primo. (verdadeira)

$\sim B \Rightarrow \sim A$: Se algum número par é primo, então nem todo número primo é ímpar. (verdadeira)

MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (VUNESP-SP) Um jantar reúne 13 pessoas de uma mesma família. Das afirmações a seguir, referentes às pessoas reunidas, a única necessariamente **VERDADEIRA** é:

A) Pelo menos uma delas tem altura superior a 1,90 m.

B) Pelo menos duas delas são do sexo feminino.

C) Pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

D) Pelo menos uma delas nasceu num dia par.

E) Pelo menos uma delas nasceu em janeiro ou fevereiro.

02. (UFSCar-SP) Em uma competição de queda de braço, cada competidor que perde duas vezes é eliminado. Isso significa que um competidor pode perder uma disputa (uma "luta") e ainda assim ser campeão. Em um torneio com 200 jogadores, o número **MÁXIMO** de "lutas" que serão disputadas, até se chegar ao campeão, é

A) 99
C) 299
E) 499
B) 199
D) 399

03. (UFMG–2007) Raquel, Júlia, Rita, Carolina, Fernando, Paulo, Gustavo e Antônio divertem-se em uma festa.

Sabe-se que

I) essas pessoas formam quatro casais; e

II) Carolina não é esposa de Paulo.

Em um dado momento, observa-se que a mulher de Fernando está dançando com o marido de Raquel, enquanto Fernando, Carolina, Antônio, Paulo e Rita estão sentados, conversando. Então, é **CORRETO** afirmar que a esposa de Antônio é

A) Carolina.
C) Raquel.
B) Júlia.
D) Rita.

04. A negação da afirmação "Nenhuma pessoa lenta em aprender frequenta esta escola" é

A) "Todas as pessoas lentas em aprender frequentam esta escola."

B) "Todas as pessoas lentas em aprender não frequentam esta escola."

C) "Algumas pessoas lentas em aprender frequentam esta escola."

D) "Algumas pessoas lentas em aprender não frequentam esta escola."

E) "Nenhuma pessoa lenta em aprender não frequenta esta escola."

05. (CEFET-RJ) Se os pais de artistas sempre são artistas, então

A) os filhos de não artistas nunca são artistas.

B) os filhos de não artistas sempre são artistas.

C) os filhos de artistas sempre são artistas.

D) os filhos de artistas nunca são artistas.

E) os filhos de artistas quase sempre são artistas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (Fatec-SP–2007) Numa caixa, existem 10 moedas cujos valores somados totalizam R$ 1,00. Na caixa, existem moedas de um centavo e de cinco centavos, entre outras. É **CORRETO** afirmar que na caixa devem existir, pelo menos,

A) uma moeda de dez centavos e duas de cinco centavos.

B) duas moedas de dez centavos e uma de cinco centavos.

C) duas moedas de vinte e cinco centavos e uma de cinco centavos.

D) duas moedas de vinte e cinco centavos e uma de dez centavos.

E) duas moedas de cinquenta centavos.

02. (Ibmec-SP–2007) Observe o *slogan* de uma cervejaria, utilizado em uma campanha publicitária:

"Se o bar é bom, então o *chopp* é Tathurana."

Os bares Matriz e Autêntico oferecem a seus clientes *chopp* das marcas Tathurana e Karakol, respectivamente. Então, de acordo com o *slogan* anterior, pode-se concluir que

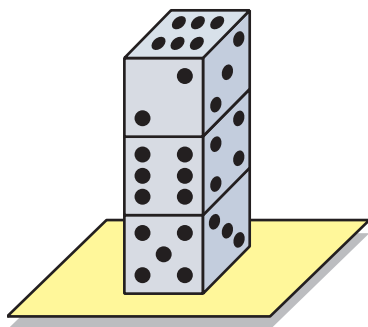
A) os dois bares são necessariamente bons.

B) o bar Matriz é necessariamente bom e o bar Autêntico pode ser bom ou não.

C) o bar Matriz é necessariamente bom e o bar Autêntico, necessariamente, não é bom.

D) o bar Matriz pode ser bom ou não e o bar Autêntico, necessariamente, não é bom.

E) os dois bares, necessariamente, não são bons.

03. (Cesgranrio) A figura a seguir mostra três dados iguais. O número da face que é a base inferior da coluna de dados

A) é 1.

B) é 2.

C) é 4.

D) é 6.

E) pode ser 1 ou 4.

04. (OEM-RJ) Alice, Beatriz, Célia e Dora apostaram uma corrida.

Alice disse: Célia ganhou e Beatriz chegou em segundo lugar.

Beatriz disse: Célia chegou em segundo lugar e Dora em terceiro.

Célia disse: Dora foi a última e Alice, a segunda.

Cada uma das quatro meninas disse uma verdade e uma mentira (não necessariamente nessa ordem). **DETERMINE** a ordem de chegada das meninas nessa corrida.

05. (FAAP-SP) Cláudia é mais velha do que Ana?

I. Roberta é quatro anos mais velha do que Cláudia e 2 anos mais moça do que Ana.

II. A média das idades de Cláudia e Ana é 17 anos.

A) I é suficiente para responder, mas II não é.

B) II é suficiente para responder, mas I não é.

C) I e II juntas são suficientes para responder, mas nenhuma delas sozinha é suficiente.

D) Cada proposição é suficiente para responder.

E) Nenhuma das proposições é suficiente para responder.

06. (UFOP-MG–2008) Considere a afirmação: "Em um grupo de **n** pessoas, pode-se garantir que três delas aniversariam no mesmo mês". O **MENOR** valor de **n** que torna verdadeira essa afirmação é

A) 3 B) 24 C) 25 D) 36

07. (UFV-MG–2008) Três jogadores decidiram jogar três partidas de um determinado jogo, no qual, em cada partida, há apenas um único perdedor. Combinaram que aquele que perdesse deveria pagar a cada um dos outros dois a quantia que cada ganhador possuía naquele momento. Ao final das três partidas, ocorreu que cada jogador perdeu uma única partida e que no final cada jogador ficou com R$ 8,00. É **CORRETO** afirmar que o jogador que perdeu

A) a terceira partida, no final, perdeu R$ 4,00.

B) a primeira partida, no final, perdeu R$ 4,00.

C) a terceira partida, no final, ganhou R$ 4,00.

D) a primeira partida, no final, ganhou R$ 4,00.

08. (Unifor-CE–2009) Certo dia, o Centro Acadêmico de uma Faculdade de Medicina publicou a seguinte notícia:

"Todos os alunos serão reprovados em Anatomia!"

A repercussão dessa manchete fez com que a direção da faculdade interpelasse os responsáveis e deles exigisse, como forma de retratação, a publicação de uma negação da afirmação feita. Diante desse fato, a nota de retratação pode ter sido:

A) "Nenhum aluno será reprovado em Anatomia."

B) "Algum aluno será aprovado em Anatomia."

C) "Algum aluno será reprovado em Anatomia."

D) "Se alguém for reprovado em Anatomia, então não será um aluno."

E) "Todos os reprovados em Anatomia não são alunos."

09. (OBM) Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e, entre as 10 restantes, algumas são brancas e as outras são pretas. O **MENOR** número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor, é

A) 31

B) 33

C) 35

D) 37

E) 38

10. São verdadeiras as seguintes afirmações:

I. Todos os calouros são humanos.

II. Todos os estudantes são humanos.

III. Alguns estudantes pensam.

Dadas as quatro afirmações a seguir:

1. Todos os calouros são estudantes.
2. Alguns humanos pensam.
3. Nenhum calouro pensa.
4. Alguns humanos que pensam não são estudantes.

Então, as sentenças que são consequências lógicas de I, II e III são

A) 2

B) 4

C) 2, 3

D) 2, 4

E) 1, 2

11. (Unimontes-MG) Em uma gincana, três crianças teriam de vestir camisetas azul, preta e branca, sendo uma cor para cada criança. Seus tênis apresentariam, cada par deles, uma dessas três cores. Fabrício usaria tênis azuis, somente Paulo usaria tênis e camiseta da mesma cor, e Pedro não usaria camiseta nem tênis brancos. As cores das camisetas de Fabrício, Paulo e Pedro seriam, respectivamente,

A) azul, branco e preto.

B) preto, branco e azul.

C) branco, preto e azul.

D) azul, preto e branco.

12. (UFJF-MG–2008) Uma empresa funciona nos turnos da manhã e da tarde. Um trabalhador dessa empresa dispõe de **D** dias para cumprir, precisamente, uma jornada de 9 turnos. Nesses **D** dias, ele não foi trabalhar exatamente 6 manhãs e exatamente 7 tardes. Qual é o valor de **D**?

A) 7

B) 9

C) 10

D) 11

E) 12

13. Alberto, Bernardo, Carlos e Diego foram jantar em companhia de suas esposas. No restaurante, sentaram-se ao redor de uma mesa redonda de forma que:

i) nenhum marido se sentou ao lado de sua esposa.

ii) em frente de Alberto se sentou Carlos.

iii) à direita da esposa de Alberto se sentou Bernardo.

iv) não havia dois homens juntos.

Quem se sentou entre Alberto e Diego?

A) A esposa de Alberto.

B) A esposa de Carlos.

C) A esposa de Diego.

D) A esposa de Bernardo.

14. (CEFET-MG–2007) Considere as afirmativas:

I. "Se Paulo é médico, então Artur não é professor".

II. "Se Paulo não é médico, então Bruno é engenheiro".

Sabendo-se que Artur é professor, pode-se concluir, **CORRETAMENTE**, que

A) Paulo é médico.

B) Bruno é engenheiro.

C) Artur é professor e Paulo é médico.

D) Paulo é médico ou Bruno não é engenheiro.

E) Artur é professor e Bruno não é engenheiro.

15. (UFRJ) João não estudou para a prova de Matemática; por conta disso, não entendeu o enunciado da primeira questão. A questão era de múltipla escolha e tinha as seguintes alternativas:

(A) O problema tem duas soluções, ambas positivas.

(B) O problema tem duas soluções, uma positiva e outra negativa.

(C) O problema tem mais de uma solução.

(D) O problema tem pelo menos uma solução.

(E) O problema tem exatamente uma solução positiva.

João sabia que só havia uma alternativa correta. Ele pensou um pouco e cravou a resposta certa. **DETERMINE** a escolha feita por João. **JUSTIFIQUE** sua resposta.

16. Eduardo mente nas quartas, quintas e sextas e diz a verdade no resto da semana. André mente aos domingos, segundas e terças e diz a verdade no resto dos dias. Se ambos dizem: "Amanhã é um dia no qual eu minto.", que dia da semana será amanhã?

A) Sábado

B) Terça-feira

C) Quarta-feira

D) Sexta-feira

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2007) A diversidade de formas geométricas espaciais criadas pelo homem, ao mesmo tempo em que traz benefícios, causa dificuldades em algumas situações. Suponha, por exemplo, que um cozinheiro precise utilizar exatamente 100 mL de azeite de uma lata que contenha 1 200 mL e queira guardar o restante do azeite em duas garrafas, com capacidade para 500 mL e 800 mL cada, deixando cheia a garrafa maior. Considere que ele não disponha de instrumento de medida e decida resolver o problema utilizando apenas a lata e as duas garrafas. As etapas do procedimento utilizado por ele estão ilustradas nas figuras a seguir, tendo sido omitida a 5ª etapa.

Qual das situações ilustradas a seguir corresponde à 5ª etapa do procedimento?

A)

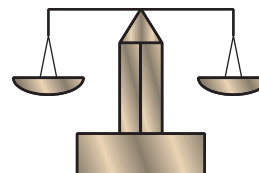
B)

C)

D)

E)

Instrução: Texto para as questões **02** e **03**.

Um armazém recebe sacos de açúcar de 24 kg para que sejam empacotados em embalagens menores. O único objeto disponível para pesagem é uma balança de dois pratos, sem os pesos metálicos.

02. (Enem–1998) Realizando uma única pesagem, é possível montar pacotes de

A) 3 kg.
B) 4 kg.
C) 6 kg.
D) 8 kg.
E) 12 kg.

03. (Enem–1998) Realizando exatamente duas pesagens, os pacotes que podem ser feitos são os de

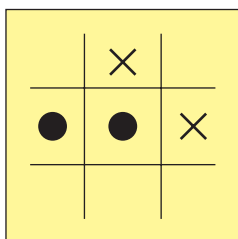
A) 3 kg e 6 kg.
B) 3 kg, 6 kg e 12 kg.
C) 6 kg, 12 kg e 18 kg.
D) 4 kg e 8 kg.
E) 4 kg, 6 kg e 8 kg.

04. (Enem–1999) Vinte anos depois da formatura, cinco colegas de turma decidem organizar uma confraternização. Para marcar o dia e o local da confraternização, precisam comunicar-se por telefone. Cada um conhece o telefone de alguns colegas e desconhece o de outros. No quadro a seguir, o número 1 indica que o colega da linha correspondente conhece o telefone do colega da coluna correspondente; o número 0 indica que o colega da linha não conhece o telefone do colega da coluna. Exemplo: Beto sabe o telefone do Dino que não conhece o telefone do Aldo.

	Aldo	Beto	Carlos	Dino	Ênio
Aldo	1	1	0	1	0
Beto	0	1	0	1	0
Carlos	1	0	1	1	0
Dino	0	0	0	1	1
Ênio	1	1	1	1	1

O número mínimo de telefonemas que Aldo deve fazer para se comunicar com Carlos é

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05. (Enem–2008) O jogo da velha é um jogo popular, originado na Inglaterra. O nome "velha" surgiu do fato de esse jogo ser praticado, à época em que foi criado, por senhoras idosas que tinham dificuldades de visão e não conseguiam mais bordar. Esse jogo consiste na disputa de dois adversários que, em um tabuleiro 3×3, devem conseguir alinhar verticalmente, horizontalmente ou na diagonal, 3 peças de formato idêntico. Cada jogador, após escolher o formato da peça com a qual irá jogar, coloca uma peça por vez, em qualquer casa do tabuleiro, e passa a vez para o adversário. Vence o primeiro que alinhar 3 peças.

No tabuleiro representado anteriormente, estão registradas as jogadas de dois adversários em um dado momento. Observe que uma das peças tem formato de círculo e a outra tem a forma de um xis. Considere as regras do jogo da velha e o fato de que, neste momento, é a vez do jogador que utiliza os círculos. Para garantir a vitória na sua próxima jogada, esse jogador pode posicionar a peça no tabuleiro de

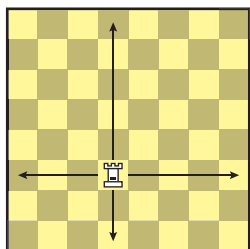
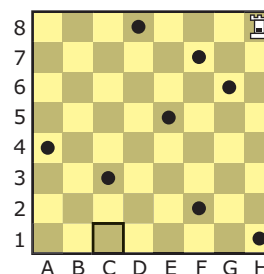
A) uma só maneira.

B) duas maneiras distintas.

C) três maneiras distintas.

D) quatro maneiras distintas.

E) cinco maneiras distintas.

06. (Enem–2009 / Anulada) O xadrez é jogado por duas pessoas. Um jogador joga com as peças brancas, o outro, com as pretas. Neste jogo, vamos utilizar somente a torre, uma das peças do xadrez. Ela pode mover-se para qualquer casa ao longo da coluna ou linha que ocupa, para frente ou para trás, conforme indicado na figura a seguir:

O jogo consiste em chegar a um determinado ponto sem passar por cima dos pontos pretos já indicados.

Respeitando-se o movimento da peça torre e as suas regras de movimentação no jogo, qual é o menor número de movimentos possíveis e necessários para que a torre chegue à casa C1?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

GABARITO

Fixação

01. C
02. D
03. A
04. C
05. A

Propostos

01. A
02. D
03. C
04. A ordem de chegada é: Célia, Alice, Dora e Beatriz.
05. A
06. C
07. C
08. B
09. E
10. A
11. B
12. D
13. B
14. B
15. Alternativa D
16. C

Seção Enem

01. D
02. E
03. C
04. C
05. B
06. C

MATEMÁTICA

Potenciação e radiciação

MÓDULO 02 FRENTE A

POTÊNCIA DE EXPOENTE NATURAL

Definição

Dados um número real **a** e um número natural **n**, com $n > 1$, chama-se de potência de base **a** e expoente **n** o número a^n, que é o produto de **n** fatores iguais a **a**.

Dessa definição, decorre que:

$a^2 = a.a$, $a^3 = a.a.a$, $a^4 = a.a.a.a$, etc.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Dados um número real **a**, não nulo, e um número natural **n**, chama-se de potência de base **a** e expoente $-n$ o número a^{-n}, que é o inverso de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Por definição, temos ainda que $a^0 = 1$ (sendo $a \neq 0$) e $a^1 = a$.

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$, então valem as seguintes propriedades:

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \ a \neq 0$$

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \ b \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

RAIZ ENÉSIMA ARITMÉTICA

Definição

Dados um número real não negativo **a** e um número natural **n**, $n \geq 1$, chama-se de raiz enésima aritmética de **a** o número real e não negativo **b** tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado radical, indica a raiz enésima aritmética de **a**. Nele, **a** é chamado de radicando, e **n**, de índice.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \ \text{ e } \ b \geq 0$$

OBSERVAÇÕES

i) Da definição decorre $\left(\sqrt[n]{a^n}\right) = a$, para todo $a \geq 0$.

ii) Observemos na definição dada que:

Correto	Incorreto
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{16} = \pm 4$
$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{25}{81}} = \pm\frac{5}{9}$
$\sqrt[3]{-8} = -2$	$\sqrt{0,09} = \pm 0,3$
$\pm\sqrt{49} = \pm 7$	$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{64}} = \frac{\pm 6}{\pm 8}$

iii) Devemos estar atentos no cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemplos

1º) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$, e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$

2º) $\sqrt{x^2} = |x|$, e não $\sqrt{x^2} = x$

No conjunto dos números reais, temos situações distintas conforme **n** seja par ou ímpar.

i) **Para n par:**

Se $a < 0$, não existe raiz n-ésima de **a**.

Exemplo: $\sqrt{-5}$ não existe no conjunto dos números reais.

Se a = 0, a única raiz n-ésima é zero.

Exemplo: $\sqrt{0} = 0$

Se a > 0, a única raiz n-ésima de **a** é $\sqrt[n]{a}$.

Exemplo: $\sqrt{4} = 2$

ii) Para n ímpar:

Qualquer que seja o número real **a**, existe uma única raiz n-ésima, que é indicada por $\sqrt[n]{a}$ (ou $a^{\frac{1}{n}}$, como veremos adiante).

Exemplos

1º) $\sqrt[3]{-8} = -2$

2º) $\sqrt[3]{1} = 1$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$$

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot p]{a}$$

Se $b \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $b.\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a.b^n}$.

Exemplos

1º) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5.2^3} = \sqrt[3]{40}$

2º) $-3\sqrt{2} = -\sqrt{2.3^2} = -\sqrt{18}$

Assim, o coeficiente do radical pode ser colocado no radicando com expoente igual ao índice do radical.

POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

Definição

Dados um número real **a** (positivo), um número inteiro **p** e um número natural **q** ($q \geq 1$), chama-se de potência de base **a** e expoente $\frac{p}{q}$ a raiz com índice **q** de a^p.

$$a > 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$$

Sendo $\frac{p}{q} > 0$, define-se $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Exemplos

1º) $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2.2} = 2\sqrt{2}$

2º) $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$

Propriedades

As propriedades a seguir se verificam para as potências de expoente racional.

Assim, se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então valem as seguintes propriedades:

$$a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

$$(a.b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.b^{\frac{p}{q}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$$

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Para facilitar cálculos, é comum eliminar raízes dos denominadores das frações, através de um processo chamado racionalização.

Por exemplo, ao realizarmos a divisão $\frac{1}{\sqrt{2}}$, como $\sqrt{2}$ é aproximadamente 1,41, teremos de efetuar $\frac{1}{1,41}$. Porém, se racionalizarmos a fração dada (multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{2}$), teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E usando a mesma aproximação anterior, ficamos com a divisão $\frac{1,41}{2}$, que é mais simples que a primeira.

De modo geral, para racionalizarmos uma fração com denominador $\sqrt[n]{a^p}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{a^{n-p}}$, pois $\sqrt[n]{a^p}.\sqrt[n]{a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^{p+n-p}} = a$.

Exemplos

1º) $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

2º) $\frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{27}}{3}$

Caso apareça no denominador de uma fração uma soma de radicais, devemos utilizar os produtos notáveis.

Vejamos alguns exemplos de racionalizações:

Exemplo 1

Quando o denominador é do tipo a + b ou a − b, e **a** e / ou **b** são raízes quadradas, lembrando que:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

então devemos multiplicar numerador e denominador por a − b ou a + b, respectivamente. Assim:

1º) $\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2º) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{5}$

Exemplo 2

Quando o denominador é do tipo a − b ou a + b, e um dos dois é uma raiz cúbica, lembrando que:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

então devemos multiplicar o numerador e o denominador por $a^2 + ab + b^2$ ou $a^2 - ab + b^2$, respectivamente. Assim:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \cdot \frac{\left[\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1^2\right)\right]}{\left[\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1^2\right)\right]} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\sqrt[3]{2^3}-1^3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFLA-MG) O valor da expressão $\frac{10^{\frac{n}{2}}(10^{m-1}+10^{m+1})}{10^m\left(10^{\frac{n}{2}}+10^{2+\frac{n}{2}}\right)}$ é

A) 1

B) 10

C) $10^{m.\frac{n}{2}-2}$

D) $10^{m.\frac{n}{2}+2}$

E) 10^{-1}

02. (UFMG) Uma fazenda tem uma área de 0,4 km^2. Suponha que essa fazenda seja um quadrado, cujo lado mede ℓ metros. O número ℓ satisfaz a condição

A) $180 < \ell < 210$

B) $210 < \ell < 250$

C) $400 < \ell < 500$

D) $600 < \ell < 700$

03. (UFV-MG) A expressão $\frac{7}{\sqrt{7+a}-\sqrt{a}}$, em que **a** é um número real positivo, equivale a

A) 7

B) $\sqrt{7+a}+\sqrt{a}$

C) $\sqrt{7}$

D) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

E) 1

04. (UFMG) O valor de $m = \left(\sqrt{(-3)^2} - \frac{1}{0,444...}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt[4]{2^8}}$ é

A) $-\frac{2}{21\sqrt{7}}$

B) $\frac{1}{24}$

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

E) $\frac{9}{8}$

05. (UFMG) O valor de

$m = (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2})$ é

A) 6

B) $6\sqrt{6}$

C) 16

D) 18

E) $12\sqrt{5}$

MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFMG) Se a = 10^{-3}, o valor de $\frac{0{,}01.0{,}001.10^{-1}}{100.0{,}0001}$, em função de **a**, é

A) 100a

B) 10a

C) a

D) $\frac{a}{10}$

02. (PUC Minas) O valor da expressão $y = 8.\sqrt[3]{10^{-3}}.5.10^{-3}$ é

A) 40

B) 40.10^{2}

C) 40^{-2}

D) 4.10^{-3}

E) 40.10^{-3}

03. (FUVEST-SP) Qual desses números é igual a 0,064?

A) $\left(\frac{1}{80}\right)^2$

B) $\left(\frac{1}{8}\right)^2$

C) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

D) $\left(\frac{1}{800}\right)^2$

E) $\left(\frac{8}{10}\right)^3$

04. (UNIFEI-MG–2008) Sejam $A = \sqrt{\frac{x}{y}}$, $B = \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}$ e $C = \sqrt[6]{\frac{x}{y}}$.

Então, o produto A.B.C é igual a

A) $\sqrt[3]{y}$

B) $\sqrt[3]{x}$

C) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$

D) $\sqrt[3]{xy}$

05. (UFPel-RS) O valor da expressão $\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5} \div \left(\frac{1}{32}\right)^{0,2}$ é

A) 0,125

B) 0,25

C) 0,5

D) 0,75

E) 1

06. (Cesgranrio) O número de algarismos do produto $5^{17}.4^{9}$ é igual a

A) 17

B) 18

C) 26

D) 34

E) 35

07. (UECE) Considerando os números $a = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$ e $b = \frac{5-\sqrt{3}}{2}$, o valor de $a^2 - b^2$ é

A) $5\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{3}{4}$

08. (UFMG) Se **a** e **b** são números reais positivos tais que $(a^2 + b^3)(a^2 - b^3) = \frac{2^3}{3^7} - b^6$, pode-se afirmar que $a^{-\frac{1}{3}}$ é igual a

A) $\sqrt[12]{3^7.2^{-3}}$

B) $\sqrt[12]{3^{-7}.2^3}$

C) $\sqrt[3]{3^{28}.2^{12}}$

D) $\sqrt[3]{3^{-28}.2^{12}}$

E) $\sqrt[44]{(3.2)^{-21}}$

09. (Mackenzie-SP) Se $(2^x.k^{y+1}.5^{t+3}).(2^{x-1}.k^y.5^{t+1})^{-1} = 150$, então **k** vale

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

10. (Cesgranrio) Um número real **x**, que satisfaz $\sqrt{35} < x < \sqrt{39}$, é

A) 5,7

B) 5,8

C) 6

D) 6,3

11. (FUVEST-SP) Qual é o valor da expressão $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$?

A) $\sqrt{3}$

B) 4

C) 3

D) 2

E) $\sqrt{2}$

12. (PUC Minas) Se $x = \frac{2}{3+2\sqrt{2}}$ e $y = \frac{56}{4-\sqrt{2}}$, então x + y é igual a

A) 22

B) $2\sqrt{2}$

C) $8\sqrt{2}$

D) $2 + 8\sqrt{2}$

E) $160 + 4\sqrt{2}$

13. (Cesgranrio) Efetuando e simplificando $\frac{1}{1+\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$, obtemos

A) $\frac{1}{1-x^2}$

B) $\frac{2}{1-x^2}$

C) $\frac{1}{1-x}$

D) $\frac{1}{1+x}$

E) $\frac{2}{1-x}$

14. (UEL-PR) Seja $M = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right]^{1,5}.(0,6)^{-2}$.

Efetuando-se as operações, tem-se que

A) $M < -\frac{5}{3}$

B) $-1 < M < 0$

C) $0 < M < \frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{2} < M < \frac{4}{5}$

15. (PUC-Campinas-SP) Efetuando-se a expressão adiante, obtém-se

$$\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}}$$

A) $\frac{\sqrt[3]{14}+2}{5}$

B) $\sqrt[3]{\frac{114}{5}}$

C) $\frac{6}{5}$

D) $\frac{4}{5}$

E) $\frac{3}{5}$

16. (PUC-Campinas-SP) Simplificando-se a expressão $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{\left(5+2\sqrt{6}\right)}$, obtém-se

A) 10

B) 25

C) $10 - 2\sqrt{6}$

D) $10 + 2\sqrt{6}$

E) $10 - 4\sqrt{6}$

17. (PUC Rio) Seja $a = 12(\sqrt{2} - 1)$, $b = 4\sqrt{2}$ e $c = 3\sqrt{3}$, então

A) $a < c < b$

B) $c < a < b$

C) $a < b < c$

D) $b < c < a$

E) $b < a < c$

18. (UFV-MG) Dada a expressão

$$E = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right].\left(-\frac{1}{2}\right)^6 + 2^{-7} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3},$$

é **CORRETO** afirmar que o valor de 2E – 26 é

A) 28

B) 54

C) 80

D) –17

E) –35

19. (FUVEST-SP) O **MENOR** número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado de um número inteiro positivo é

A) 37

B) 36

C) 35

D) 34

E) 33

20. (UNIFESP-SP–2008) Se $0 < a < b$, racionalizando o denominador, tem-se que:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}$$

Assim, o valor da soma

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1\,000}}$$ é

A) $10\sqrt{10} - 1$

B) $10\sqrt{10}$

C) 99

D) 100

E) 101

MATEMÁTICA

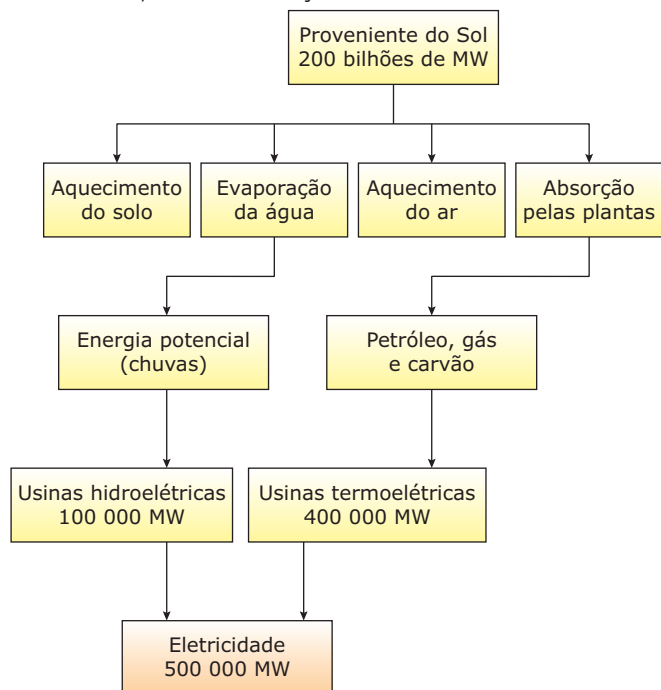
SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2010) Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas *Veja* (ed. 2 055), *Claudia* (ed. 555), *National Geographic* (ed. 93) e *Nova Escola* (ed. 208) (Adaptação).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consomem 1 000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

A) 10^2
B) 10^3
C) 10^4
D) 10^5
E) 10^9

02. (Enem–1999) O diagrama seguinte representa a energia solar que atinge a Terra e sua utilização na geração de eletricidade. A energia solar é responsável pela manutenção do ciclo da água, pela movimentação do ar, e pelo ciclo do carbono que ocorre através da fotossíntese dos vegetais, da decomposição e da respiração dos seres vivos, além da formação de combustíveis fósseis.

De acordo com o diagrama, a humanidade aproveita, na forma de energia elétrica, uma fração da energia recebida como radiação solar correspondente a

A) 4×10^{-9}
B) $2,5 \times 10^{-6}$
C) 4×10^{-4}
D) $2,5 \times 10^{-3}$
E) 4×10^{-2}

03. (Enem–2009 / Anulada) No depósito de uma biblioteca há caixas contendo folhas de papel de 0,1 mm de espessura, e em cada uma delas estão anotados 10 títulos de livros diferentes. Essas folhas foram empilhadas formando uma torre vertical de 1 m de altura. Qual a representação, em potência de 10, correspondente à quantidade de títulos de livros registrados nesse empilhamento?

A) 10^2 B) 10^4 C) 10^5 D) 10^6 E) 10^7

04. (Enem–2003) Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais mostraram o processo de devastação sofrido pela Região Amazônica entre agosto de 1999 e agosto de 2000. Analisando fotos de satélites, os especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do mapa um total de 20 000 quilômetros quadrados de floresta. Um órgão de imprensa noticiou o fato com o seguinte texto:

"O assustador ritmo de destruição é de um campo de futebol a cada oito segundos."

Considerando que um ano tem aproximadamente 32×10^6 s (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da área oficial de um campo de futebol é aproximadamente 10^{-2} km² (um centésimo de quilômetro quadrado), as informações apresentadas nessa notícia permitem concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de

A) 10 000 km², e a comparação dá a ideia de que a devastação não é tão grave quanto o dado numérico nos indica.
B) 10 000 km², e a comparação dá a ideia de que a devastação é mais grave do que o dado numérico nos indica.
C) 20 000 km², e a comparação retrata exatamente o ritmo da destruição.
D) 40 000 km², e o autor da notícia exagerou na comparação, dando a falsa impressão de gravidade a um fenômeno natural.
E) 40 000 km² e, ao chamar atenção para um fato realmente grave, o autor da notícia exagerou na comparação.

GABARITO

Fixação

01. E 02. D 03. B 04. D 05. D

Propostos

01. D	05. E	09. C	13. E	17. A
02. D	06. B	10. C	14. D	18. A
03. C	07. A	11. B	15. D	19. A
04. B	08. A	12. A	16. A	20. A

Seção Enem

01. E 02. B 03. C 04. E

MATEMÁTICA

Produtos notáveis e fatoração

MÓDULO 01 FRENTE B

PRODUTOS NOTÁVEIS

Os produtos notáveis são identidades que podem ser obtidas de maneira prática. Assim, como são muito frequentes no cálculo algébrico, iremos listar os principais:

i) Quadrado da soma de dois termos

$(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

ii) Quadrado da diferença de dois termos

$(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$

iii) Produto da soma pela diferença de dois termos

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

iv) Cubo da soma de dois termos

$(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$

v) Cubo da diferença de dois termos

$(a - b)^3 = a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - b^3$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Desenvolver os seguintes produtos notáveis:

A) $\left(\frac{a}{3} - b\right)^2$

Resolução:

$$\left(\frac{a}{3} - b\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2.\frac{a}{3}.b + (b)^2 = \frac{a^2}{9} - \frac{2ab}{3} + b^2$$

B) $(x + 3y)(x - 3y)$

Resolução:

$(x + 3y)(x - 3y) = (x)^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2$

02. (UNIMEP-SP) A diferença entre o quadrado da soma de dois números inteiros e a soma de seus quadrados não pode ser

A) 12 B) 6 C) 4 D) 2 E) 9

Resolução:

Sejam **x** e **y** dois números inteiros. Temos:

$(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2 = 2xy$

Como o número obtido é par, temos que o único valor que não corresponde à expressão é 9. Portanto, a alternativa correta é a letra **E**.

FATORAÇÃO

Seja uma expressão algébrica escrita como uma soma de termos. Fatorar essa expressão significa escrevê-la na forma de um produto. Para tanto, existem determinadas técnicas, descritas a seguir:

Fator comum

Inicialmente, identificamos um termo comum a todas as parcelas da expressão. Em seguida, colocamos esse termo em evidência.

Exemplos

1º) $ab + ac = a(b + c)$

2º) $24x^3y^2 - 6x^4y + 12x^2y^5 = 6x^2y(4xy - x^2 + 2y^4)$

Agrupamento

Às vezes, não é possível identificar, de início, um fator comum a todas as parcelas da expressão. Nesse caso, formamos dois ou mais grupos com um termo comum. Em seguida, colocamos em evidência um fator comum a todos os grupos.

Exemplos

1º) $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

2º) $8x^2 - 4xz - 6xy + 3yz = 4x(2x - z) - 3y(2x - z) = (2x - z)(4x - 3y)$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

03. Fatorar a expressão $a^2 - 4ba + 3b^2$.

Resolução:

$a^2 - 4ba + 3b^2 = a^2 - ba - 3ba + 3b^2$
$= a(a - b) - 3b(a - b)$
$= (a - b)(a - 3b)$

Soma e diferença de cubos

Trata-se de identidades muito úteis em cálculo algébrico. São elas:

i) Soma de cubos

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

ii) Diferença de cubos

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemplo

Fatorar a expressão $x^3 - 27$.

Resolução:

$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

Identificação de um produto notável

Exemplos

1º) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 \rightarrow$ Quadrado da soma.

2º) $a^4b^2 - c^6 = (a^2b)^2 - (c^3)^2 = (a^2b + c^3)(a^2b - c^3)$
$\rightarrow$ Produto da soma pela diferença.

3º) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = (a - 1)^3 \rightarrow$ Cubo da diferença.

Fatoração do trinômio da forma $ax^2 + bx + c$

Sejam x_1 e x_2 as raízes reais do trinômio $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Esse trinômio pode ser escrito na forma:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

OBSERVAÇÃO

As raízes podem ser obtidas pela Fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ sendo } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemplo

Fatorar a expressão $x^2 - 5x + 6$.

Resolução:

Cálculo das raízes:

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

Substituindo na forma fatorada, temos $1(x - 2)(x - 3)$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG–2006) Sejam **x** e **y** números reais não nulos tais que $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = -2$. Então, é **CORRETO** afirmar que

A) $x^2 - y = 0$

B) $x + y^2 = 0$

C) $x^2 + y = 0$

D) $x - y^2 = 0$

02. (UFV-MG) Simplificando-se a expressão $\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$, em que **x** e **y** são números positivos e distintos, obtém-se

A) $\frac{1}{x}$ B) $2y$ C) xy D) $\frac{1}{y}$ E) $2x$

03. (Mackenzie-SP) Se $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$, então $a + a^{-1}$ vale

A) $\frac{100}{9}$ B) $\frac{82}{3}$ C) $\frac{82}{9}$ D) $\frac{100}{82}$ E) $\frac{16}{9}$

04. (Fatec-SP) Sabe-se que $a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40$ e $a - b - c = 10$ e que **a**, **b** e **c** são números reais. Então, o valor de $a + b + c$ é igual a

A) 1 B) 2 C) 4 D) 10 E) 20

05. (UFV-MG) Sabendo-se que $x + y = \frac{15}{7}$ e $x - y = \frac{1}{14}$, qual é o valor da expressão seguinte?

$$\frac{(x^2 + 2xy + y^2)(x^3 - y^3)}{(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)} \div \frac{(x^2 - xy)}{2x}$$

A) 30 B) $\frac{30}{7}$ C) 60 D) $\frac{60}{7}$ E) 25

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. **FATORE:**

A) $mx + nx - px$

B) $2ax^2 - 32a$

C) $4m^3 - 6m^2$

D) $x^8 - 1$

E) $m^2 - mn - 3m + 3n$

F) $x^5 + 2x^4 + x^3$

02. (PUC Minas) O resultado simplificado da expressão $\left[\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \div \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\right] \div \frac{m+n}{mn}$ é

A) $\frac{1}{m^2}$

B) $\frac{m+n}{n}$

C) $\frac{m}{n}$

D) $\frac{m+n}{m}$

E) 1

03. **FATORE:**

A) $4a^2 - 9b^2$

B) $(x + y)^2 - y^2$

C) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

D) $1 - (x + y)^2$

E) $m^4 - 16n^4$

F) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

G) $x^2 + 2xy + y^2$

H) $x^2 - 2xy + y^2 - 1$

04. **FATORE** os seguintes trinômios do 2º grau:

A) $x^2 + 9x + 20$

B) $x^2 - 9x + 20$

C) $y^2 - 10y - 24$

D) $t^2 + 12t - 45$

05. **FATORE:**

A) $x^3 + 8$

B) $a^3 + 125$

C) $a^3 - 1$

D) $h^3 - 64$

06. Dado $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$, **CALCULE** $x + \frac{1}{x}$.

07. (Fatec-SP–2006) Se **a**, **x**, **y**, **z** são números reais tais que $z = \frac{2x - 2y + ax - ay}{a^3 - a^2 - a + 1} \div \frac{2 + a}{a^2 - 1}$, então **z** é igual a

A) $\frac{x - y}{a - 1}$

B) $\frac{x - y}{a^2 - 1}$

C) $\frac{x + y}{a + 1}$

D) $\frac{x + y}{a - 1}$

E) $\frac{(x - y)(a + 1)}{a - 1}$

08. (Unifor-CE) O número real

$$y = \frac{3x^3 + 3x^2 - 6x}{x^2 - 4} + \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$$

é equivalente a

A) $\frac{3x^3 - 2x^2 + 4}{x(x - 2)}$

B) $\frac{3x^3 - 2x^2 - 4x + 4}{x(x - 2)}$

C) $\frac{3x^3 - 6x - 21}{4}$

D) $\frac{3x^2 - 2x - 2}{2(x - 1)}$

E) $\frac{3x^2 + 2x - 4}{2x}$

09. (FGV-SP) O valor da expressão $y = \frac{0,49 - x^2}{0,7 + x}$ para $x = -1,3$ é

A) 2 B) −2 C) 2,6 D) 1,3 E) −1,3

10. (UFMG) Sejam **a**, **b** e **c** números reais e positivos tais que $\frac{ab}{b + c} = \frac{b^2 - bc}{a}$. Então, é **CORRETO** afirmar que

A) $a^2 = b^2 + c^2$

B) $b = a + c$

C) $b^2 = a^2 + c^2$

D) $a = b + c$

11. (UFES) O número $N = 2\,002^2.2\,000 - 2\,000.1\,998^2$ é igual a

A) 2.10^6

B) 4.10^6

C) 8.10^6

D) 16.10^6

E) 32.10^6

12. (UFMG) Simplificando-se a expressão

$\frac{24y + 6xy - 15x - 60}{10x - 40 - 4xy + 16y}$, obtém-se

A) $-\frac{3(x + 4)}{2(x - 4)}, y \neq \frac{5}{2}, x \neq 4$

B) $-\frac{2(x + 4)}{3(x - 4)}, y \neq \frac{5}{2}, x \neq 4$

C) $\frac{2(x + 4)}{3(x - 4)}, y \neq -\frac{5}{2}, x \neq 4$

D) $\frac{3(x - 4)}{2(x + 2)}, y \neq -\frac{5}{2}, x \neq -2$

E) $-\frac{3}{2}, y \neq -\frac{5}{2}, x \neq -4$

13. (UFMG) Se $a^2 + 3b^2 = \frac{1}{a}$, a expressão $(a + b)^3 + (a - b)^3$ é igual a

A) $2(1 - 3ab^2)$

B) $2a^2$

C) $\frac{1}{a}$

D) 1

E) 2

14. (UFMG) Fatorando-se a expressão $x^4 - y^4 + 2x^3y - 2xy^3$, obtém-se

A) $(x + y)^2(x - y)^2$

B) $(x + y)(x - y)^3$

C) $(x^2 + y^2)(x - y)^2$

D) $(x + y)^4$

E) $(x + y)^3(x - y)$

15. (PUC Minas) A diferença entre os quadrados de dois números ímpares, positivos e consecutivos é 40. Esses números pertencem ao intervalo

A) [3, 9]

B) [4, 10]

C) [8, 14]

D) [10, 15]

E) [9, 11[

16. (UFES) **CALCULE** o valor da expressão:

$[10^2 + 20^2 + 30^2 + ... + 100^2] - [9^2 + 19^2 + 29^2 + ... + 99^2]$

17. (FEI-SP) Simplificando a expressão representada a seguir, obtemos

$$(a^2b + ab^2)\frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

A) $a + b$

B) $a^2 + b^2$

C) ab

D) $a^2 + ab + b^2$

E) $b - a$

18. (FUVEST-SP) Sabendo que **x**, **y** e **z** são números reais e $(2x + y - z)^2 + (x - y)^2 + (z - 3)^2 = 0$, então $x + y + z$ é igual a

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

19. (FGV-SP–2010) Fatorando completamente o polinômio $x^9 - x$ em polinômios e monômios com coeficientes inteiros, o número de fatores será

A) 7 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

20. (PUC Rio) Se $x^2(1 - y)^2 = y^2(1 - x)^2$ e $x \neq y$, então $x + y$ será

A) $x^2 + y^2$

B) xy

C) 2

D) $2xy$

E) $2y$

21. (UFMG) A expressão $\left[x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1\right]\left[x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + 1\right]$ é igual a

A) $x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{2}} + 1$

B) $x - x^{\frac{1}{2}} + 1$

C) $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1$

D) $x + x^{\frac{1}{2}} + 1$

E) N.d.a.

MATEMÁTICA

22. (UFOP-MG–2008) Simplificando a expressão

$$\frac{ax^2 - ay^2}{x^2 - 4xy + 3y^2}$$

para $x \neq y$, obtém-se

A) $\frac{a(x - y)}{x + 3y}$

B) $\frac{x - y}{x + 3y}$

C) $\frac{a(x + y)}{x - 3y}$

D) $\frac{x + y}{x - 3y}$

23. (PUC Minas) Após simplificar a expressão $\frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - 3x + 1}$, com $x \neq 1$, obtém-se

A) $\frac{2x - 1}{3x + 1}$

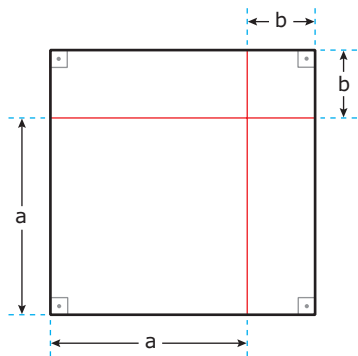
B) $\frac{3x + 1}{2x - 1}$

C) $\frac{3x - 1}{2x + 1}$

D) $\frac{2x + 1}{3x - 1}$

E) $\frac{2x - 1}{3x - 1}$

SEÇÃO ENEM

01. Em Matemática, verifica-se em várias situações uma correspondência entre um modelo algébrico e um modelo geométrico. Como exemplo, observe a figura a seguir:

A área da figura anterior corresponde ao produto notável

A) $(a - b)^2$

B) $(a + b)^2$

C) $(a + b)(a - b)$

D) $(a + b)^3$

E) $(a - b)^3$

02. Anselmo foi encarregado de calcular o valor da expressão $A = 4\,000.206^2 - 4\,000.204^2$, sem utilizar calculadora. Seu amigo Fernando recomendou a utilização de técnicas de fatoração, além do conhecimento dos produtos notáveis. Ao seguir o conselho de Fernando, Anselmo obteve

A) 3 280 000

B) 360 000

C) 2 380 000

D) 1 680 000

E) 1 240 000

GABARITO

Fixação

01. B
02. D
03. C
04. C
05. C

Propostos

01. A) $x(m + n - p)$
    B) $2a(x + 4)(x - 4)$
    C) $2m^2(2m - 3)$
    D) $(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$
    E) $(m - n)(m - 3)$
    F) $x^3(x + 1)^2$
02. E
03. A) $(2a - 3b)(2a + 3b)$
    B) $x(x + 2y)$
    C) $4ab$
    D) $(1 - x - y)(1 + x + y)$
    E) $(m + 2n)(m - 2n)(m^2 + 4n^2)$
    F) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$
    G) $(x + y)^2$
    H) $(x - y + 1)(x - y - 1)$
04. A) $(x + 5)(x + 4)$
    B) $(x - 5)(x - 4)$
    C) $(y - 12)(y + 2)$
    D) $(t + 15)(t - 3)$
05. A) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
    B) $(a + 5)(a^2 - 5a + 25)$
    C) $(a - 1)(a^2 + a + 1)$
    D) $(h - 4)(h^2 + 4h + 16)$
06. $\pm 2\sqrt{2}$
07. A
08. B
09. A
10. C
11. E
12. A
13. E
14. E
15. C
16. 1 090
17. D
18. C
19. B
20. D
21. D
22. C
23. B

Seção Enem

01. B
02. A

MATEMÁTICA

Divisibilidade, MDC e MMC

MÓDULO 02 FRENTE B

DIVISÃO EUCLIDIANA

O algoritmo da divisão de dois números inteiros **D** e **d**, com $d \neq 0$, é representado da seguinte forma:

Em que $0 \leq r < |d|$ e $D = qd + r$.

Portanto, **q** é o quociente, e **r** é o resto da divisão de **D** por **d**, e denotamos **D** por dividendo e **d** por divisor.

OBSERVAÇÃO

Quando temos o caso em que $r = 0$, então $D = q.d$ e, assim, dizemos que **D** é um múltiplo de **d** ou **d** é um divisor de **D**.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Considere todas as divisões entre números naturais tais que o divisor é 13 e o resto é o triplo do quociente. Determinar a soma dos possíveis quocientes dessas divisões.

Resolução:

Sejam **D** o dividendo e **q** o quociente na situação descrita. Como o resto é o triplo do quociente, escrevemos:

$$\begin{array}{r|l} D & 13 \\ \hline 3q & q \end{array}$$

Sabemos que o resto deve ser menor do que o divisor. Portanto, devemos encontrar todos os valores de **q** para os quais $3q < 13$. Assim, temos:

Para $q = 0 \Rightarrow 3q = 0 < 13$

Para $q = 1 \Rightarrow 3q = 3 < 13$

Para $q = 2 \Rightarrow 3q = 6 < 13$

Para $q = 3 \Rightarrow 3q = 9 < 13$

Para $q = 4 \Rightarrow 3q = 12 < 13$

Para $q = 5 \Rightarrow 3q = 15 > 13$ (não convém)

Portanto, os possíveis valores de **q** são 0, 1, 2, 3 e 4. A sua soma é igual a 10.

Resposta: 10

MÚLTIPLOS E DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

Sejam dois números inteiros **a** e **b**, em que $b \neq 0$. O número **a** será múltiplo de **b** se existir um número inteiro **m** tal que:

$$a = m.b$$

Daí, dizemos que:

i) **a** é múltiplo de **b**, ou

ii) **a** é divisível por **b**, ou

iii) **b** é divisor de **a**, ou

iv) **b** divide **a**.

Número par

É todo número inteiro divisível por 2, ou seja, que pode ser escrito na forma 2n, com $n \in \mathbb{Z}$.

Número ímpar

É todo número inteiro que não é divisível por 2, ou seja, que pode ser escrito na forma $2n + 1$, em que $n \in \mathbb{Z}$.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Divisibilidade por 2: Um número é divisível por 2 quando seu último algarismo é par.

Divisibilidade por 3: Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é divisível por 3.

Divisibilidade por 4: Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos dois últimos algarismos é divisível por 4.

Divisibilidade por 5: Um número é divisível por 5 quando o último algarismo é 0 ou 5.

Divisibilidade por 6: Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3.

Divisibilidade por 8: Um número é divisível por 8 quando o número formado pelos 3 últimos algarismos é divisível por 8.

Divisibilidade por 9: Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9.

Divisibilidade por 10: Um número é divisível por 10 quando o seu último algarismo é 0.

Divisibilidade por 11: Um número é divisível por 11 quando a soma dos algarismos de ordem ímpar menos a soma dos algarismos de ordem par é um número divisível por 11.

Divisibilidade por 12: Um número é divisível por 12 quando é divisível por 3 e por 4.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (EPCAR-MG) Considere o número m = 488a9b, em que **b** é o algarismo das unidades e **a** é o algarismo das centenas. Sabendo-se que **m** é divisível por 45, o valor da soma a + b é

A) 7
B) 9
C) 16
D) 18

Resolução:

Um número é divisível por 45 se esse número é divisível por 9 e por 5. Para que **m** seja divisível por 5, temos de considerar duas possibilidades: b = 0 ou b = 5

i) Para b = 0, temos m = 488a90. Porém, **m** é divisível também por 9, ou seja, a soma

$4 + 8 + 8 + a + 9 + 0 = 29 + a$

deve ser divisível por 9. O múltiplo de 9 mais próximo de 29 é o número 36. Para que a soma seja igual a esse número, temos a = 7.

ii) Para b = 5, temos m = 488a95. Porém, **m** é divisível também por 9, ou seja, a soma

$4 + 8 + 8 + a + 9 + 5 = 34 + a$

deve ser divisível por 9. Como no caso anterior, a soma deve ser igual a 36. Portanto, a = 2.

Em ambos os casos, temos a + b = 7.

Resposta: Letra A

NÚMEROS PRIMOS

Um número inteiro positivo é dito primo quando admite exatamente dois divisores positivos: o número 1 e ele mesmo.

Sendo **P** o conjunto dos números primos positivos, temos:

$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...\}$

OBSERVAÇÕES

i) Se um número possui mais de dois divisores positivos, ele é chamado de composto.

ii) O número 1 não é primo nem composto.

Reconhecimento de um número primo

Seja **n** um número inteiro positivo. Para verificarmos se **n** é primo, podemos proceder da seguinte forma:

i) Calculamos o valor de $\sqrt{n}$.

ii) Verificamos se **n** é divisível por cada um dos números primos menores do que $\sqrt{n}$.

iii) Se **n** não é divisível por nenhum desses números primos, então **n** é primo. Caso contrário, **n** é composto.

Exemplo

Verificar se 97 é primo.

$\sqrt{97} = 9,85$ (aproximadamente)

Os primos menores do que $\sqrt{97}$ são 2, 3, 5 e 7.

Observe que 97 não é divisível por nenhum desses números, ou seja, 97 é primo.

DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou pode ser escrito como um produto de fatores primos. Esse produto é obtido pela chamada decomposição em fatores primos ou, simplesmente, fatoração do número.

Exemplo

Decompor em fatores primos o número 840.

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	$840 = 2^3.3.5.7$

CÁLCULO DA QUANTIDADE DE DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

i) Decompõe-se o número em fatores primos.

ii) Tomam-se os expoentes de cada fator primo, e soma-se 1 a cada um deles.

iii) Multiplicam-se os resultados anteriores. O produto é a quantidade de divisores positivos do número.

Exemplo

Determinar a quantidade de divisores de 360.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	$2^3.3^2.5^1$

Assim, a quantidade de divisores é:

$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4.3.2 = 24$

MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

O máximo divisor comum de dois ou mais números naturais é o maior número que é divisor de todos esses números. Para se obter o MDC entre dois ou mais números, deve-se:

i) Decompô-los em fatores primos.

ii) Tomar os fatores primos comuns com seus menores expoentes.

iii) Efetuar o produto desses fatores.

Exemplo

Calcular o máximo divisor comum dos números 90, 96 e 54.

$90 = 2.3^2.5$ $\quad$ $96 = 2^5.3$ $\quad$ $54 = 2.3^3$

Daí, temos que MDC (90, 96, 54) = 2.3 = 6.

OBSERVAÇÃO

Dois números são ditos primos entre si quando o MDC entre eles é igual a 1.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números naturais é o menor número natural, excluindo o zero, que é múltiplo desses números.

Assim, para se obter o MMC entre dois ou mais números naturais, deve-se:

i) Decompô-los em fatores primos.

ii) Tomar todos os fatores primos comuns e não comuns com seus maiores expoentes.

iii) Efetuar o produto desses fatores.

Exemplo

Calcular o mínimo múltiplo comum dos números 90, 96 e 54.

$90 = 2.3^2.5$ $\quad$ $96 = 2^5.3$ $\quad$ $54 = 2.3^3$

Daí, temos que o MMC (90, 96, 54) = $2^5.3^3.5$ = 4 320.

OBSERVAÇÃO

Podemos também calcular o MMC de dois ou mais números através da chamada decomposição simultânea.

Refazendo o exemplo anterior, temos:

90, 96, 54	2
45, 48, 27	2
45, 24, 27	2
45, 12, 27	2
45, 6, 27	2
45, 3, 27	3
15, 1, 9	3
5, 1, 3	3
5, 1, 1	5
1, 1, 1	MMC (90, 96, 54) = $2^5.3^3.5$ = 4 320

RELAÇÃO ENTRE O MMC E O MDC

Sendo **a** e **b** dois números naturais, temos:

$$[MMC (a, b)].[MDC (a, b)] = a.b$$

MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

03. Determinar a soma dos algarismos do menor número natural que, quando dividido por 2, 3, 5 ou 9, deixa sempre resto 1.

Resolução:

Seja **x** o número procurado. Logo, temos:

$$\begin{array}{r|l} x & 2 \\ \hline 1 & q_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 3 \\ \hline 1 & q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 5 \\ \hline 1 & q_3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 9 \\ \hline 1 & q_4 \end{array}$$

Em que q_1, q_2, q_3 e q_4 são os quocientes de cada uma dessas divisões. Podemos escrevê-las da seguinte forma:

$x = 2q_1 + 1 \Rightarrow x - 1 = 2q_1 \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 2

$x = 3q_2 + 1 \Rightarrow x - 1 = 3q_2 \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 3

$x = 5q_3 + 1 \Rightarrow x - 1 = 5q_3 \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 5

$x = 9q_4 + 1 \Rightarrow x - 1 = 9q_4 \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 9

Portanto, $x - 1$ é um múltiplo comum de 2, 3, 5 e 9. Como queremos o menor número **x** que satisfaz essas condições, então temos:

$x - 1 = \text{MMC}(2, 3, 5, 9) = 90 \Rightarrow x - 1 = 90 \Rightarrow x = 91$

A soma dos algarismos de **x** é 10.

Resposta: 10

04. Determinar o menor número natural que deixa restos 3, 5 e 6 quando dividido por 5, 7 e 8, respectivamente.

Resolução:

Seja **x** o número procurado. Daí, temos:

$$\begin{array}{r|l} x & 5 \\ \hline 3 & q_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 7 \\ \hline 5 & q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 8 \\ \hline 6 & q_3 \end{array}$$

Em que q_1, q_2, q_3 são os quocientes de cada uma dessas divisões. Logo, temos:

$x = 5q_1 + 3 \Rightarrow$

$x + 2 = 5q_1 + 3 + 2 \Rightarrow$

$x + 2 = 5q_1 + 5 \Rightarrow$

$x + 2 = 5(q_1 + 1)$

Assim, como o resto é zero, então $x + 2$ é múltiplo de 5.

$x = 7q_2 + 5 \Rightarrow$

$x + 2 = 7q_2 + 5 + 2 \Rightarrow$

$x + 2 = 7q_2 + 7 \Rightarrow$

$x + 2 = 7(q_2 + 1)$

Assim, como o resto é zero, então $x + 2$ é múltiplo de 7.

$x = 8q_3 + 6 \Rightarrow$

$x + 2 = 8q_3 + 6 + 2 \Rightarrow$

$x + 2 = 8q_3 + 8 \Rightarrow$

$x + 2 = 8(q_3 + 1)$

Assim, como o resto é zero, então $x + 2$ é múltiplo de 8.

Como queremos o menor número **x** que satisfaz essas condições, então temos:

$x + 2 = \text{MMC}(5, 7, 8) = 280 \Rightarrow x = 278$

Resposta: 278

05. Em um terminal rodoviário, sabe-se que:

- a cada 50 minutos parte um ônibus da linha Amarela;
- a cada 30 minutos parte um ônibus da linha Verde;
- a cada 40 minutos parte um ônibus da linha Branca.

Considerando-se que às 8h houve uma partida simultânea de um ônibus de cada uma das três linhas, e considerando que o quadro de horários não sofrerá alterações, determinar a hora exata em que a próxima partida simultânea ocorrerá.

Resolução:

O tempo da próxima partida simultânea deve ser igual ao mínimo múltiplo comum dos tempos de partida de cada uma das linhas. Assim, temos que MMC (50, 30, 40) = 600 minutos = 10 horas. Portanto, a próxima partida simultânea ocorrerá às 8h + 10h = 18 horas.

Resposta: 18 horas

06. Uma sala retangular de dimensões 36 m e 40 m deverá ter o seu piso preenchido com placas idênticas, de formato quadrado e dimensões inteiras. Qual é o menor número de placas quadradas necessário para revestir esse piso nas condições dadas, de maneira que não haja cortes ou sobras de material?

Resolução:

Seja **x** a medida do lado de cada placa quadrada. Observe que, para que não haja sobra de material, a medida **x** deve ser um divisor de 36 e de 40. Para que tenhamos o menor número de placas, é necessário que a medida **x** seja a maior possível. Portanto, $x = \text{MDC}(36, 40) = 4$ m. O número de placas é obtido dividindo-se a área total da sala pela área de uma das placas quadradas.

Logo: $\dfrac{36.40}{4.4} = 90$ placas

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (FEI-SP) Em uma sala retangular de piso plano nas dimensões 8,80 m por 7,60 m, deseja-se colocar ladrilhos quadrados iguais, sem necessidade de recortar nenhuma peça. A medida **MÁXIMA** do lado de cada ladrilho é

A) 10 cm.
B) 20 cm.
C) 30 cm.
D) 40 cm.
E) 50 cm.

02. (UFMG) Entre algumas famílias de um bairro, foi distribuído um total de 144 cadernos, 192 lápis e 216 borrachas. Essa distribuição foi feita de modo que o maior número possível de famílias fosse contemplado e todas recebessem o mesmo número de cadernos, o mesmo número de lápis e o mesmo número de borrachas, sem haver sobra de qualquer material. Nesse caso, o número de cadernos que cada família ganhou foi

A) 4
B) 6
C) 8
D) 9

03. (UFC-CE–2009) O expoente do número 3 na decomposição por fatores primos positivos do número natural $10^{63} - 10^{61}$ é igual a

A) 6
B) 5
C) 4
D) 3
E) 2

04. (UFMG) No sítio de Paulo, a colheita de laranjas ficou entre 500 e 1 500 unidades. Se essas laranjas fossem colocadas em sacos com 50 unidades cada um, sobrariam 12 laranjas e, se fossem colocadas em sacos com 36 unidades cada um, também sobrariam 12 laranjas. Assim sendo, quantas laranjas sobrariam se elas fossem colocadas em sacos com 35 unidades cada um?

A) 4
B) 6
C) 7
D) 2

05. (UFU-MG) Considere **a** e **b** dois números inteiros, tais que $a - b = 23$, sendo $b > 0$. Sabendo-se que, na divisão de **a** por **b**, o quociente é 8 e o resto é o maior valor possível nessa divisão, então $a + b$ é igual a

A) 29
B) 26
C) 32
D) 36

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (Cesgranrio) Certo botânico desenvolveu em laboratório 3 variedades de uma mesma planta, V_1, V_2 e V_3, que se desenvolvem cada uma a seu tempo, de acordo com a tabela a seguir. Plantando-se as 3 variedades no mesmo dia, confiando-se na exatidão da tabela, não ocorrendo nenhum fato que modifique os critérios da experiência tabulada e levando-se em conta que, a cada dia de colheita, outra semente da mesma variedade será plantada, o número **MÍNIMO** de semanas necessário para que a colheita das três variedades ocorra simultaneamente será

Variedade	Tempo de germinação (em semanas, após o plantio)	Tempo de floração (em semanas, após a germinação)	Tempo para única colheita (em semanas, após a floração)
V_1	4	3	1
V_2	2	3	1
V_3	1	2	1

A) 24
B) 18
C) 16
D) 12
E) 8

02. (UFMG) Seja **N** o menor número inteiro pelo qual se deve multiplicar 2 520 que o resultado seja o quadrado de um número natural. Então, a soma dos algarismos de **N** é

A) 9
B) 7
C) 8
D) 10

03. (UFJF-MG–2009) Em uma rodovia, a partir do quilômetro 40, a cada 3 km há postos de telefones SOS. Ocorreu um acidente no quilômetro 750 dessa rodovia. A distância do telefone SOS mais próximo do local do acidente é

A) 0,6 km.
B) 0,8 km.
C) 1 km.
D) 1,2 km.
E) 1,4 km.

04. (UNIFESP-SP–2006) Um número inteiro positivo **m** dividido por 15 dá resto 7. A soma dos restos das divisões de **m** por 3 e por 5 é

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

05. (UFU-MG) Se o máximo divisor comum entre os números 144 e $(30)^p$ é 36, em que **p** é um inteiro positivo, então o expoente **p** é igual a

A) 1 B) 3 C) 4 D) 2

MATEMÁTICA

06. (UFOP-MG–2006) O **MÍNIMO** valor de **m** para que 2^m x 162 seja divisível por 72 é

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

07. (UFV-MG) Seja x = 3 600. Se **p** é o número de divisores naturais de **x**, e **q** é o número de divisores naturais pares de **x**, então é **CORRETO** afirmar que

A) p = 45 e q = 36
B) p = 36 e q = 45
C) p = 16 e q = 10
D) p = 45 e q = 12
E) p = 16 e q = 34

08. (Unicamp-SP) Uma sala retangular medindo 3 m por 4,25 m deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados iguais. Supondo que não haja espaço entre ladrilhos vizinhos, pergunta-se:

A) Qual deve ser a dimensão máxima, em centímetros, de cada um desses ladrilhos para que a sala possa ser ladrilhada sem cortar nenhum ladrilho?

B) Quantos desses mesmos ladrilhos são necessários?

09. (UFU-MG) Dos divisores positivos de 1 800, quantos são múltiplos de 8?

A) 4 B) 9 C) 10 D) 8

10. (Unicamp-SP) Sejam **a** e **b** dois números inteiros positivos tais que MDC (a, b) = 5 e o MMC (a, b) = 105.

A) Qual é o valor de **b**, se a = 35?

B) **ENCONTRE** todos os valores possíveis para (a, b).

11. (FCMMG) Seja **x** um número inteiro positivo. Sabendo-se que **x** satisfaz às seguintes condições: é múltiplo de 3; deixa resto 1 se dividido por 2; por 5 ou por 7; o menor valor de **x**, que satisfaz a essas condições, pertence ao intervalo

A) [100, 180]
B) [190, 270]
C) [280, 360]
D) [370, 450]

12. (UFU-MG) Considere os números naturais ímpares 1, 3, 5,..., 2 001. Se x = 1.3.5... .2 001. O algarismo que ocupa a ordem das unidades de **x** é

A) 7
B) 3
C) 5
D) 1

13. (UFMG) Considere-se o conjunto **M** de todos os números inteiros formados por exatamente três algarismos iguais. Pode-se afirmar que todo n $\in$ M é múltiplo de

A) 5
B) 7
C) 13
D) 17
E) 3

14. (UFES) Deseja-se acondicionar 2 004 bolas de tênis em caixas de mesma capacidade, de modo que cada caixa contenha o número de bolas determinado por sua capacidade. Dispõe-se de vários tipos de caixas, desde o tipo com capacidade para apenas uma bola até o tipo com capacidade para todas as bolas. Nessas condições, o número de todos os possíveis tipos de caixas para acondicionar as 2 004 bolas é

A) 12 B) 15 C) 24 D) 25 E) 30

15. (UFU-MG) Desenvolvendo o número $10^{65} - 92$, iremos encontrar todos os algarismos que o compõem. Assim, pode-se afirmar que a soma desses algarismos é igual a

A) 575 B) 573 C) 566 D) 585

16. (PUC Minas) O **MAIOR** número que divide 200 e 250, deixando como restos 15 e 28, respectivamente, é

A) 37 B) 47 C) 57 D) 67

17. (FMC-RJ) Indique o número inteiro compreendido entre 387 e 429 que, ao ser dividido por 3, 5 e 7, deixa sempre resto 2.

A) 436 B) 418 C) 398 D) 422

18. (UFU-MG) Entre os números naturais compreendidos entre 1 e 150, selecione todos aqueles que tenham exatamente três divisores positivos. A soma dos números selecionados é igual a

A) 87 B) 208 C) 121 D) 464

19. (PUC Minas) No dia 31 de julho do ano 2001, três aviões foram vistos sobrevoando juntos certa cidade. Um dos aviões sobrevoaram essa cidade de quatro em quatro dias, outro de doze em doze dias, e o terceiro, de quinze em quinze dias. O próximo dia, do ano de 2001, em que os aviões sobrevoaram juntos aquela cidade foi o dia

A) 01 de outubro.
B) 02 de outubro.
C) 29 de setembro.
D) 30 de setembro.

20. (UFMG) Sejam **a**, **b**, **c** números primos distintos, em que a > b. O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de $m = a^2bc^2$ e $n = ab^2$ são, respectivamente, 21 e 1 764. Pode-se afirmar que a + b + c é igual a

A) 9
B) 10
C) 12
D) 42
E) 62

21. (UFU-MG) Sabendo-se que 302 400 = 64.27.25.7, pode-se concluir que o número de divisores de 302 400 que são múltiplos de 6 é igual a

A) 36 B) 18 C) 168 D) 108

22. (FUVEST-SP) Uma senhora tinha entre trinta e quarenta ações de uma empresa para dividir igualmente entre todos os seus netos. Num ano, quando tinha 3 netos, se a partilha fosse feita, deixaria 1 ação sobrando. No ano seguinte, nasceu mais um neto e, ao dividir igualmente entre os quatro netos o mesmo número de ações, ela observou que sobrariam 3 ações. Nesta última situação, quantas ações receberá cada neto?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

23. (UFMG) O produto de um número inteiro positivo "**a**" de três algarismos por 3 é um número terminado em 721. A soma dos algarismos de "**a**" é

A) 12
B) 13
C) 14
D) 15
E) 16

24. (UFU-MG) O número de três algarismos 2m3 é somado ao número 326, resultando no número de três algarismos 5n9. Sabendo-se que 5n9 é divisível por 9, m + n é igual a

A) 2
B) 6
C) 4
D) 8

25. (UFMG) Considerem-se todas as divisões de números inteiros positivos por 17, cujo resto é igual ao quadrado do quociente. A soma dos quocientes dessas divisões é

A) 10
B) 17
C) 17^2
D) 1 + 2 + ... + 17
E) $1^2 + 2^2 + ... + 17^2$

26. (UFMG) Na divisão de dois inteiros positivos, o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Se a soma do dividendo e do divisor é 125, o resto é

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

27. (UFU-MG) Considere a sequência ordenada de letras AMOROMAMOROMAMOROM..., em que se observa que a posição 1 é ocupada pela letra **A**, a posição 2 pela letra **M** e assim por diante. Segundo esse padrão, podemos afirmar que a letra que ocupa a posição 2 001 é

A) O.
B) M.
C) A.
D) R.

28. (Cesgranrio) Seja **n** um número inteiro positivo tal que 2n é divisor de 150. O número de valores distintos de **n** é

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 8

29. (PUC Minas) Os números naturais **a** e **b** são tais que ab = $2^3.3^2.5$ e $\frac{a}{b}$ = 0,4. O máximo divisor comum de **a** e **b** é

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 30

30. (UERJ) Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto, enquanto o outro permanece 10 segundos fechado e 30 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é

A) 150
B) 160
C) 190
D) 200

31. (UFU-MG) Uma empresa fabricou 9 000 peças do tipo **A**, 2 700 peças do tipo **B** e 4 050 peças do tipo **C**. Sabendo-se que a avaliação de todas as peças pelo controle de qualidade foi realizada pelo menor número possível de funcionários e que cada funcionário avaliou apenas um tipo de peça e o mesmo número de peças que todos os demais, qual o número de funcionários utilizados no controle de qualidade?

32. (UFPE) Uma escola deverá distribuir um total de 1 260 bolas de gude amarelas e 9 072 bolas de gude verdes entre alguns de seus alunos. Cada aluno contemplado receberá o mesmo número de bolas amarelas e o mesmo número de bolas verdes. Se a escola possui 300 alunos e o maior número possível de alunos da escola deverá ser contemplado, qual o total de bolas que cada aluno contemplado receberá?

A) 38
B) 39
C) 40
D) 41
E) 42

33. (FUVEST-SP) Maria quer cobrir o piso de sua sala com lajotas quadradas, todas com lado de mesma medida inteira, em centímetros. A sala é retangular, de lados 2 m e 5 m. Os lados das lajotas devem ser paralelos aos lados da sala, devendo ser utilizadas somente lajotas inteiras. Quais são os possíveis valores do lado das lajotas?

34. (FUVEST-SP–2008) Sabendo que os anos bissextos são os múltiplos de 4 e que o primeiro dia de 2007 foi segunda-feira, o próximo ano a começar também em uma segunda-feira será

A) 2012
B) 2014
C) 2016
D) 2018
E) 2020

MATEMÁTICA

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2005) Os números de identificação utilizados no cotidiano (de contas bancárias, de CPF, de Carteira de Identidade, etc.) usualmente possuem um dígito de verificação, normalmente representado após o hífen, como em 17 326-9. Esse dígito adicional tem a finalidade de evitar erros no preenchimento ou digitação de documentos.

Um dos métodos usados para gerar esse dígito utiliza os seguintes passos:

- Multiplica-se o último algarismo do número por 1, o penúltimo por 2, o antepenúltimo por 1, e assim por diante, sempre alternando multiplicações por 1 e por 2;
- Soma-se 1 a cada um dos resultados dessas multiplicações que for maior do que ou igual a 10;
- Somam-se os resultados obtidos;
- Calcula-se o resto da divisão dessa soma por 10, obtendo-se assim o dígito verificador.

O dígito de verificação fornecido pelo processo anterior para o número 24 685 é

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

02. (Enem–2009) Para cada indivíduo, a sua inscrição no Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) é composto por um número de 9 algarismos e outro número de 2 algarismos, na forma d_1d_2, em que os dígitos d_1 e d_2 são denominados dígitos verificadores. Os dígitos verificadores são calculados, a partir da esquerda, da seguinte maneira: os 9 primeiros algarismos são multiplicados pela sequência 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 (o primeiro por 10, o segundo por 9, e assim sucessivamente); em seguida, calcula-se o resto **r** da divisão da soma dos resultados das multiplicações por 11, e se esse resto **r** for 0 ou 1, d_1 é zero, caso contrário, $d_1 = (11 - r)$. O dígito d_2 é calculado pela mesma regra, na qual os números a serem multiplicados pela sequência dada são contados a partir do segundo algarismo, sendo d_1 o último algarismo, isto é, d_2 é zero se o resto **s** da divisão por 11 das somas das multiplicações for 0 ou 1, caso contrário, $d_2 = (11 - s)$. Suponha que João tenha perdido seus documentos, inclusive o cartão de CPF e, ao dar queixa da perda na delegacia, não conseguisse lembrar quais eram os dígitos verificadores, recordando-se apenas que os nove primeiros algarismos eram 123 456 789. Neste caso, os dígitos verificadores d_1 e d_2 esquecidos são, respectivamente,

A) 0 e 9
B) 1 e 4
C) 1 e 7
D) 9 e 1
E) 0 e 1

GABARITO

Fixação

01. D
02. B
03. E
04. D
05. A

Propostos

01. A
02. B
03. C
04. B
05. D
06. C
07. A
08. A) 25 cm
    B) 204 ladrilhos
09. B
10. A) 15
    B) (15, 35); (35, 15); (5, 105); (105, 5)
11. A
12. C
13. E
14. A
15. A
16. A
17. D
18. B
19. C
20. C
21. D
22. B
23. E
24. B
25. A
26. C
27. A
28. D
29. A
30. D
31. 35
32. D
33. 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm, 10 cm, 20 cm, 25 cm, 50 cm, 100 cm
34. D

Seção Enem

01. E
02. A

MATEMÁTICA

MÓDULO 01 — FRENTE C

Teoria dos conjuntos

Entendemos a ideia de conjuntos como qualquer coleção ou grupo de objetos ou símbolos (os quais chamamos de elementos).

Para indicar que **x** é um elemento de **A**, escrevemos $x \in A$ (lê-se **x** pertence a **A**). Se **x** não pertence a **A**, indicamos $x \notin A$.

As principais maneiras de representarmos um conjunto são:

i) Por meio da enumeração de seus elementos.

Exemplo

O conjunto dos dias da semana é:

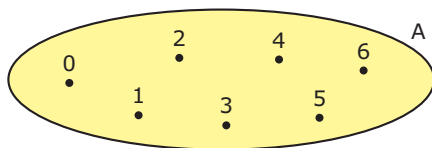
S = {domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado}

ii) Por meio de uma propriedade comum aos seus elementos.

Exemplo

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$ que corresponde ao conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

iii) Por meio do Diagrama de Venn (John Venn, lógico inglês, 1834-1923).

Exemplo

Admite-se a existência de conjuntos com um só elemento (conjuntos unitários) e de um conjunto sem elementos, denominado conjunto vazio, e representado por ∅ ou **{ }**.

SUBCONJUNTOS

Dados os conjuntos **A** e **B**, dizemos que **B** é subconjunto de **A** se, e somente se, todo elemento de **B** for elemento de **A**.

Notação: $B \subset A$ (lê-se **B** está contido em **A**)

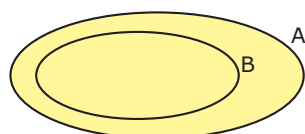



Diagrama de Venn

Sendo **A** e **B** conjuntos, tem-se que $A \subset B$ e $B \subset A$ se, e somente se, $A = B$.

OBSERVAÇÕES

i) Qualquer que seja o conjunto **A**, tem-se que **A** é subconjunto de **A**, pois todo elemento de **A** é elemento de **A**.

ii) Qualquer que seja o conjunto **A**, tem-se que o conjunto vazio é subconjunto de **A**, pois, se não o fosse, deveria existir pelo menos um elemento do conjunto vazio que não pertencesse a **A** (que é um absurdo).

Exemplo

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \{3, 4\}\}$, classificar em verdadeira **V** ou falsa **F** cada uma das seguintes proposições.

A) ( ) **A** possui 4 elementos.

B) ( ) $1 \in A$ e $2 \in A$

C) ( ) $\{1, 2\} \subset A$

D) ( ) $\{3, 4\} \subset A$

E) ( ) $\{\{3, 4\}\} \subset A$

O conjunto **A** possui 4 elementos, a saber, os números 1, 2 e 3 e o conjunto binário {3, 4}; portanto, tem-se que $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$ e $\{3, 4\} \in A$.

$\{1, 2\} \subset A$, pois 1 e 2 são elementos de **A**.

$\{3, 4\} \not\subset A$, pois 4 não é elemento de **A**.

$\{\{3, 4\}\} \subset A$, pois {3, 4} é elemento de **A**.

Assim, a única proposição falsa é a letra **D**.

CONJUNTO DAS PARTES

Sendo **A** um conjunto finito, com **n** elementos, prova-se que o número de subconjuntos de **A** é 2^n.

O conjunto de todos os subconjuntos de **A** é chamado o conjunto das partes de **A**, e será indicado por P(A).

Exemplo

Dado o conjunto $A = \{x, y, z\}$, obter o conjunto das partes de **A**.

Resolução:

Como o número de elementos de **A** é 3, conclui-se que o número de seus subconjuntos é $2^3 = 8$. Os subconjuntos de **A** são:

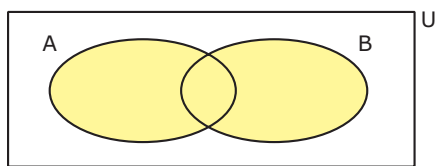
$\varnothing$; {x}; {y}; {z}; {x, y}; {x, z}; {y, z}; A

Assim, o conjunto das partes de **A** é:

P(A) = {$\varnothing$, {x}, {y}, {z}, {x, y}, {x, z}, {y, z}, A}

UNIÃO

Dados os conjuntos **A** e **B** em um universo **U**, chama-se união (ou reunião) de **A** com **B** ao conjunto dos elementos que pertencem a, pelo menos, um dos conjuntos **A** ou **B**.

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplos

1º) {1, 2, 3, 4, 5} $\cup$ {4, 5} = {1, 2, 3, 4, 5}

2º) {1, 2, 3, 4} $\cup$ $\varnothing$ = {1, 2, 3, 4}

Propriedades

$A \cup B = B \cup A$

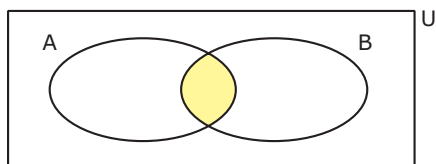
$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$

$A \cup \varnothing = A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

INTERSEÇÃO

Dados os conjuntos **A** e **B** em um universo **U**, chama-se interseção de **A** com **B** ao conjunto dos elementos comuns a **A** e **B**.

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Exemplos

1º) {1, 2, 3, 4} $\cap$ {4, 5} = {4}

2º) {1, 2, 3, 4} $\cap$ $\varnothing$ = $\varnothing$

Propriedades

$A \cap B = B \cap A$

$B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$

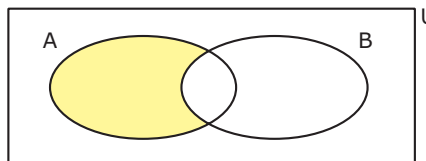
$A \cap \varnothing = \varnothing$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

$(A \cap B) \subset (A \cup B)$

DIFERENÇA

Dados os conjuntos **A** e **B** em um universo **U**, chama-se diferença entre **A** e **B**, nessa ordem, ao conjunto dos elementos de **A** que não são elementos de **B**.

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplos

1º) {1, 2, 3, 4, 5} – {4, 5} = {1, 2, 3}

2º) {1, 2} – $\varnothing$ = {1, 2}

3º) $\varnothing$ – {1, 2} = $\varnothing$

Propriedades

$(A - B) \subset A$

$A - \varnothing = A$

$\varnothing - A = \varnothing$

$A - (A \cap B) = A - B$

Exemplo

Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {3, 4, 5, 6, 7}, obter os conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$.

Resolução:

$A \cap B$ = {3, 4}
$A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
$A - B$ = {1, 2}
$B - A$ = {5, 6, 7}

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Numa pesquisa escolar a respeito da leitura dos jornais **A** e **B**, constatou-se que:

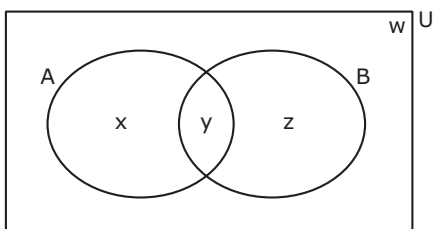
i) 280 alunos leem somente um dos jornais.

ii) 230 leem o jornal **B**.

iii) 100 leem os dois.

iv) 200 não leem o jornal **A**.

Quantos alunos foram entrevistados?

Resolução:

Sendo **x**, **y**, **z** e **w** o número de elementos de cada região indicada no diagrama anterior, segue que:

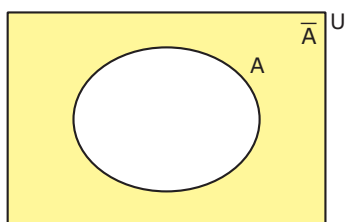
$$\begin{cases} x + z = 280 & (1) \\ y + z = 230 & (2) \\ y = 100 & (3) \\ z + w = 200 & (4) \end{cases}$$

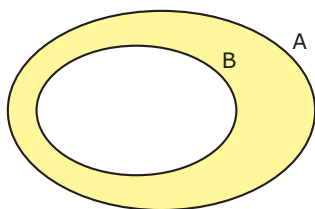
Das equações (3) e (2), tem-se que z = 130.

Substituindo **z** por 130 nas equações (1) e (4), obtêm-se, respectivamente, os valores de **x** e **w**: x = 150 e w = 70

O número total de alunos que foram entrevistados é: x + y + z + w = 450

COMPLEMENTAR

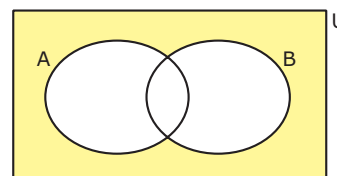
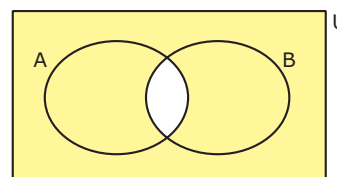
Chamemos de conjunto universo **U** o conjunto que contém todos os elementos do contexto no qual estamos trabalhando. No Diagrama de Venn a seguir, representamos o complementar de **A** em relação ao universo (indicado por C_U^A ou $\overline{A}$).

Dados os conjuntos **A** e **B**, com $B \subset A$, chama-se de complementar de **B** em relação a **A** o conjunto:

$$C_A^B = \{x \in A \text{ e } x \notin B\} = A - B$$

Exemplo

Dados A = {1, 2, 3, 4} e B = {2, 4}. O complementar de **B** em relação a **A** é $C_A^B = \{1, 3\}$.

LEIS DE MORGAN

Podemos verificar, através do Diagrama de Venn, as seguintes igualdades:

i) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

ii) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFV-MG) Fez-se, em uma população, uma pesquisa de mercado sobre o consumo de sabão em pó de três marcas distintas: **A**, **B** e **C**. Em relação à população consultada e com o auxílio dos resultados da pesquisa tabelados a seguir:

Marcas	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A,B e C	Nenhuma delas
Nº de consumidores	109	203	162	25	28	41	5	115

DETERMINE

A) o número de pessoas consultadas.

B) o número de pessoas que não consomem as marcas **A** ou **C**.

C) o número de pessoas que consomem pelo menos duas marcas.

D) a porcentagem de pessoas que consomem as marcas **A** e **B**, mas não consomem a marca **C**.

E) a porcentagem de pessoas que consomem apenas a marca **C**.

MATEMÁTICA

02. (PUC Rio–2008) Um trem viajava com 242 passageiros, dos quais:

– 96 eram brasileiros,

– 64 eram homens,

– 47 eram fumantes,

– 51 eram homens brasileiros,

– 25 eram homens fumantes,

– 36 eram brasileiros fumantes,

– 20 eram homens brasileiros fumantes.

CALCULE

A) o número de mulheres brasileiras não fumantes;

B) o número de homens fumantes não brasileiros;

C) o número de mulheres não brasileiras, não fumantes.

03. (UFOP-MG–2008) Três frutas são consumidas por um grupo de 400 pessoas: laranja, banana e maçã. Dessas pessoas, 185 consomem laranja, 125 consomem laranja e banana, 130 consomem banana e maçã, 120 consomem laranja e maçã e 100 consomem laranja, banana e maçã. O número de pessoas que consomem banana é igual ao número de pessoas que consomem maçã. O número de pessoas que consomem maçã e não consomem laranja é de

A) 95

B) 125

C) 195

D) 245

04. (UFC–2007) Dos 1 150 alunos de uma escola, 654 gostam de Português, 564 gostam de Matemática e 176 não gostam de Português nem de Matemática. Sendo assim, a quantidade de alunos que gostam de Português e de Matemática é

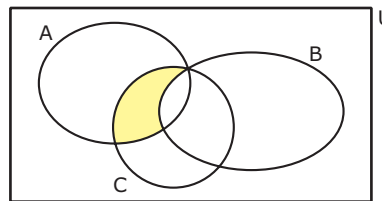
A) 300

B) 250

C) 244

D) 201

E) 122

05. (UFPE) Considere o seguinte "Diagrama de Venn", que representa graficamente os conjuntos **A**, **B** e **C**, em que **U** representa o universo.

Assinale, entre as alternativas a seguir, o conjunto que é representado pela área tracejada no diagrama, em que a barra (‾) representa o complementar do conjunto em relação a **U**.

A) $A \cap B \cap C$

B) $A \cap B \cap \overline{C}$

C) $A \cup B \cup C$

D) $A \cap \overline{B} \cap C$

E) $\overline{A} \cup B \cup C$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFES) Se A = {–2, 3, m, 8, 15} e B = {3, 5, n, 10, 13} são subconjuntos de $\mathbb{Z}$ (números inteiros), e $A \cap B$ = {3, 8, 10}, então

A) $n - m \in A$

B) $n + m \in B$

C) $m - n \in A \cup B$

D) $mn \in B$

E) $\{m + n, mn\} \subset A$

02. (UFLA-MG) Um mapa geográfico é colorido em quatro cores, sendo os países vizinhos de cores diferentes. Considere os conjuntos:

A = {países coloridos de azul}

B = {países vizinhos de países coloridos de azul}

C = {países vizinhos de países coloridos de amarelo}

M = {todos os países do mapa}

Assinale a alternativa sempre **CORRETA**.

A) $A \cup B = M$

B) $B \cap C = \varnothing$

C) $A \cap B = \varnothing$

D) $B \cup C = M$

E) $M - A = B$

03. (UFRGS) O conjunto **A** é um subconjunto de **B** e $A \neq B$, $A \cup (B - A)$ é

A) B

B) A

C) $\varnothing$

D) $A - B$

E) $A \cap B$

04. (Cesesp-PE) Numa universidade, são lidos apenas dois jornais **X** e **Y**. 80% de seus alunos leem o jornal **X** e 60%, o jornal **Y**. Sabendo-se que todo aluno é leitor de pelo menos um dos dois jornais, assinale a alternativa que corresponde ao percentual de alunos que leem ambos.

A) 80%

B) 14%

C) 40%

D) 60%

E) 48%

05. (UFMG) Em uma escola, 5 000 alunos inscreveram-se para cursar as disciplinas **A** e **B**. Desses alunos, 2 825 matricularam-se na disciplina **A** e 1 027, na disciplina **B**. Por falta de condições acadêmicas, 1 324 alunos não puderam matricular-se em nenhuma das disciplinas. O número de alunos matriculados, simultaneamente, nas duas disciplinas é

A) 156

B) 176

C) 297

D) 1 027

E) 1 798

06. (UFC) Sejam **M** e **N** conjuntos que possuem um único elemento comum. Se o número de subconjuntos de **M** é igual ao dobro do número de subconjuntos de **N**, o número de elementos do conjunto $M \cup N$ é

A) o triplo do número de elementos de **M**.

B) o triplo do número de elementos de **N**.

C) o quádruplo do número de elementos de **M**.

D) o dobro do número de elementos de **M**.

E) o dobro do número de elementos de **N**.

07. (UFU-MG) Num grupo de estudantes, 80% estudam inglês, 40% estudam francês e 10% não estudam nenhuma dessas línguas. Nesse grupo, a porcentagem de alunos que estudam ambas as línguas é

A) 25%.

B) 50%.

C) 15%.

D) 33%.

E) 30%.

08. (UFMG) Os conjuntos **A**, **B** e $A \cup B$ têm, respectivamente, 10, 9 e 15 elementos. O número de elementos de $A \cap B$ é

A) 2

B) 3

C) 4

D) 6

E) 8

09. (FGV-SP) Numa universidade com **N** alunos, 80 estudam Física, 90 Biologia, 55 Química, 32 Biologia e Física, 23 Química e Física, 16 Biologia e Química e 8 estudam nas três faculdades. Sabendo-se que essa universidade somente mantém as três faculdades, quantos alunos estão matriculados na universidade?

A) 304

B) 162

C) 146

D) 154

E) N.d.a.

10. (UFRN) Se **A**, **B** e **C** são conjuntos tais que $C - (A \cup B) = \{6, 7\}$ e $C \cap (A \cup B) = \{4, 5\}$, então **C** é igual a

A) $\{4, 5\}$

B) $\{6, 7\}$

C) $\{4, 5, 6\}$

D) $\{5, 6, 7\}$

E) $\{4, 5, 6, 7\}$

11. (FGV-SP) Em certo ano, ao analisar os dados dos candidatos ao Concurso Vestibular para o Curso de Graduação em Administração, nas modalidades Administração de Empresas e Administração Pública, concluiu-se que

i) 80% do número total de candidatos optaram pela modalidade Administração de Empresas.

ii) 70% do número total de candidatos eram do sexo masculino.

iii) 50% do número de candidatos à modalidade Administração Pública eram do sexo masculino.

iv) 500 mulheres optaram pela modalidade Administração Pública.

O número de candidatos do sexo masculino à modalidade Administração de Empresas foi

A) 4 000

B) 3 500

C) 3 000

D) 1 500

E) 1 000

12. (UFU-MG–2006) De uma escola de Uberlândia, partiu uma excursão para Caldas Novas com 40 alunos. Ao chegar em Caldas Novas, 2 alunos adoeceram e não frequentaram as piscinas. Todos os demais alunos frequentaram as piscinas, sendo 20 pela manhã e à tarde, 12 somente pela manhã, 3 somente à noite e 8 pela manhã, à tarde e à noite. Se ninguém frequentou as piscinas somente no período da tarde, quantos alunos frequentaram as piscinas à noite?

A) 16

B) 12

C) 14

D) 18

13. (FGV-SP) Simplificando a expressão $\overline{(\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap Y)}$, teremos

A) universo.

B) vazio.

C) $X \cap Y$

D) $\overline{X} \cap Y$

E) $X \cap \overline{Y}$

14. (UFU-MG) Chamando de **U** o conjunto formado por todas as pessoas que moram em Uberlândia, de **A** o subconjunto de **U** formado pelas pessoas do sexo masculino e de **B** o subconjunto de **U** formado pelas pessoas que nasceram em Uberlândia, então duas maneiras equivalentes de representar o conjunto de pessoas do sexo feminino que moram em Uberlândia, mas que nasceram em outra cidade são

Observação: Para todo subconjunto **C** de **U**, $C^C = \{x \in U: x \notin C\}$.

A) $A^C \cup B^C$ e $(A \cup B)^C$

B) $A^C \cup B^C$ e $(A \cap B)^C$

C) $A^C \cap B^C$ e $(A \cap B)^C$

D) $A^C \cap B^C$ e $(A \cup B)^C$

15. (UFOP-MG–2008) Se o conjunto **A** possui 67 elementos e o conjunto **B** possui 48 elementos, então o número de elementos do conjunto $A \cap B$ é, no **MÁXIMO**,

A) 0 B) 115 C) 1 D) 48

16. (UFMG) Em uma pesquisa de opinião, foram obtidos estes dados:

i) 40% dos entrevistados leem o jornal **A**.

ii) 55% dos entrevistados leem o jornal **B**.

iii) 35% dos entrevistados leem o jornal **C**.

iv) 12% dos entrevistados leem os jornais **A** e **B**.

v) 15% dos entrevistados leem os jornais **A** e **C**.

vi) 19% dos entrevistados leem os jornais **B** e **C**.

vii) 7% dos entrevistados leem os três jornais.

viii) 135 pessoas entrevistadas não leem nenhum dos três jornais.

Considerando-se esses dados, é **CORRETO** afirmar que o número total de entrevistados foi

A) 1 200 C) 1 250

B) 1 500 D) 1 350

17. (UFU-MG) O número de conjuntos distintos, os quais contêm o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} e estão contidos no conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}, é igual a

A) 16 C) 64

B) 32 D) 128

18. (UEL-PR–2006) Um grupo de estudantes resolveu fazer uma pesquisa sobre as preferências dos alunos quanto ao cardápio do restaurante universitário. 9 alunos optaram somente por carne de frango, 3 somente por peixes, 7 por carne bovina e frango, 9 por peixe e carne bovina e 4 pelos três tipos de carne. Considerando que 20 alunos manifestaram-se vegetarianos, 36 não optaram por carne bovina e 42 não optaram por peixe, assinale a alternativa que apresenta o número de alunos entrevistados.

A) 38
B) 42
C) 58
D) 62
E) 78

19. (ITA-SP) Denotemos por n(X) o número de elementos de um conjunto finito **X**. Sejam **A**, **B** e **C** conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, n(A) + n(B) + n(C) é igual a

A) 11
B) 14
C) 15
D) 18
E) 25

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2004) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a

A) 135
B) 126
C) 118
D) 114
E) 110

Instrução: Texto para a questão **02**.

Uma escola de Ensino Médio tem 250 alunos que estão matriculados na 1ª, 2ª ou 3ª séries. 32% dos alunos são homens e 40% dos homens estão na 1ª série. 20% dos alunos matriculados estão na 3ª série, sendo 10 alunos homens. Dentre os alunos da 2ª série, o número de mulheres é igual ao número de homens. A tabela a seguir pode ser preenchida com as informações dadas:

	1ª	2ª	3ª	Total
Mulher	a	b	c	a + b + c
Homem	d	e	f	d + e + f
Total	a + d	b + e	c + f	250

02. (Enem–1998) O valor de **a** é

A) 10 B) 48 C) 92 D) 102 E) 120

03. (Enem–2002) Um estudo realizado com 100 indivíduos que abastecem seu carro uma vez por semana em um dos postos **X**, **Y** ou **Z** mostrou que

- 45 preferem **X** a **Y**, e **Y** a **Z**;
- 25 preferem **Y** a **Z**, e **Z** a **X**;
- 30 preferem **Z** a **Y**, e **Y** a **X**.

Se um dos postos encerrar suas atividades, e os 100 consumidores continuarem se orientando pelas preferências descritas, é possível afirmar que a liderança de preferência nunca pertencerá a

A) **X**.
B) **Y**.
C) **Z**.
D) **X** ou **Y**.
E) **Y** ou **Z**.

04. (Enem–2004) Antes de uma eleição para prefeito, certo instituto realizou uma pesquisa em que foi consultado um número significativo de eleitores, dos quais 36% responderam que iriam votar no candidato **X**; 33%, no candidato **Y** e 31%, no candidato **Z**. A margem de erro estimada para cada um desses valores é de 3% para mais ou para menos. Os técnicos do instituto concluíram que, se confirmado o resultado da pesquisa,

A) apenas o candidato **X** poderia vencer e, nesse caso, teria 39% do total de votos.
B) apenas os candidatos **X** e **Y** teriam chances de vencer.
C) o candidato **Y** poderia vencer com uma diferença de até 5% sobre **X**.
D) o candidato **Z** poderia vencer com uma diferença de, no máximo, 1% sobre **X**.
E) o candidato **Z** poderia vencer com uma diferença de até 5% sobre o candidato **Y**.

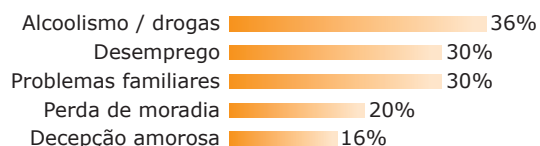
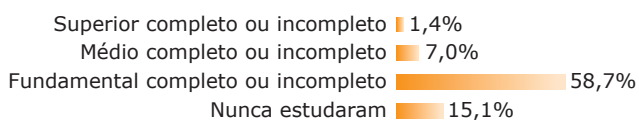
Instrução: Texto para as questões **05** e **06**.

A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31 922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no Ensino Superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros a seguir:

Por que vive na rua?

Escolaridade

Superior completo ou incompleto 1,4%
Médio completo ou incompleto 7,0%
Fundamental completo ou incompleto 58,7%
Nunca estudaram 15,1%

ISTOÉ, 07 maio 2008, p. 21 (Adaptação).

05. (Enem–2008) As informações apresentadas no texto são suficientes para se concluir que

A) as pessoas que vivem na rua e sobrevivem de esmolas são aquelas que nunca estudaram.

B) as pessoas que vivem na rua e cursaram o Ensino Fundamental, completo ou incompleto, são aquelas que sabem ler e escrever.

C) existem pessoas que declararam mais de um motivo para estarem vivendo na rua.

D) mais da metade das pessoas que vivem na rua e que ingressaram no Ensino Superior se diplomou.

E) as pessoas que declararam o desemprego como motivo para viver na rua também declararam a decepção amorosa.

06. (Enem–2008) No universo pesquisado, considere que **P** seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo / drogas e **Q** seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto **P** ou do conjunto **Q**, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de **P** e **Q** é igual a

A) 12%.
B) 16%.
C) 20%.
D) 36%.
E) 52%.

GABARITO

Fixação

01. A) 500
B) 257
C) 84
D) 4%
E) 19,6%

02. A) 29
B) 5
C) 127

03. B
04. C
05. D

Propostos

01. A
02. C
03. A
04. C
05. B
06. E
07. E
08. C
09. B
10. E
11. C
12. C
13. C
14. D
15. D
16. B
17. C
18. C
19. D

Seção Enem

01. C
02. C
03. A
04. D
05. C
06. A

MATEMÁTICA

MÓDULO 02 FRENTE C

Conjuntos numéricos

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Chama-se conjunto dos números naturais – símbolo $\mathbb{N}$ – ao conjunto formado pelos números 0, 1, 2, 3, ...

Assim: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Destacamos o conjunto $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$ (conjunto dos números naturais não nulos).

No conjunto dos números naturais, é sempre possível efetuarmos a soma ou a multiplicação de dois números (essas operações estão definidas em $\mathbb{N}$). Dizemos que o conjunto dos números naturais é fechado em relação à sua soma e à sua multiplicação. Porém, nem sempre sua subtração é possível. Por exemplo, $3 - 5 \notin \mathbb{N}$, daí a necessidade de um conjunto mais amplo.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Chama-se conjunto dos números inteiros – símbolo $\mathbb{Z}$ – ao conjunto formado por todos os números naturais e pelos opostos.

Assim: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

No conjunto $\mathbb{Z}$, distinguimos cinco subconjuntos notáveis:

i) $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$ (conjunto dos inteiros não negativos).

ii) $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, ...\}$ (conjunto dos inteiros não positivos).

iii) $\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$ (conjunto dos inteiros não nulos).

iv) $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$ (conjunto dos inteiros positivos).

v) $\mathbb{Z}_-^* = \{..., -3, -2, -1\}$ (conjunto dos inteiros negativos).

A soma, subtração ou multiplicação de números inteiros sempre resulta em um número inteiro. O conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) é, portanto, fechado em relação a essas operações.

Divisibilidade

Dizemos que o inteiro **a**, em que $a \neq 0$, é divisor do inteiro **b**, ou que **a** divide **b**, se a divisão de **b** por **a** for exata, ou seja, resto zero.

Exemplos

1º) 2 é divisor de 6, pois $6 \div 2 = 3$.

2º) 7 divide −21, pois $-21 \div 7 = -3$.

> Quando **a** é divisor de **b**, com $a \neq 0$, dizemos que "**b** é divisível por **a**" ou "**b** é múltiplo de **a**".

Para um inteiro **a** qualquer, indicamos com D(a) o conjunto de seus divisores e com M(a) o conjunto de seus múltiplos.

Exemplos

1º) $D(2) = \{\pm 2, \pm 1\}$

2º) $D(-3) = \{\pm 3, \pm 1\}$

3º) $D(0) = \mathbb{Z}^*$

4º) $M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$

5º) $M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ...\}$

6º) $M(0) = \{0\}$

Dizemos que um número inteiro **p** é primo se $p \notin \{-1, 0, 1\}$ e $D(p) = \{-p, p, -1, 1\}$.

Exemplo

−2, 2, −3, 3, −5, 5, −7 e 7 são primos.

Dado um número $q \notin \{-1, 1\}$, o inverso de **q** não existe em $\mathbb{Z}$: $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$. Por isso, não podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de divisão. Introduziremos, então, o conjunto dos números racionais.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Chama-se conjunto dos números racionais – símbolo $\mathbb{Q}$ – ao conjunto das frações que podem ser reduzidas à forma $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

No conjunto $\mathbb{Q}$, destacamos 5 subconjuntos:

i) $\mathbb{Q}_+$ = conjunto dos racionais não negativos.

ii) $\mathbb{Q}_-$ = conjunto dos racionais não positivos.

iii) $\mathbb{Q}^*$ = conjunto dos racionais não nulos.

iv) $\mathbb{Q}^*_+$ = conjunto dos números racionais positivos.

v) $\mathbb{Q}^*_-$ = conjunto dos racionais negativos.

Na fração $\frac{a}{b}$, em que $b \neq 0$, **a** é o numerador e **b**, o denominador. Se **a** e **b** são primos entre si, isto é, se MDC (a, b) = 1, então dizemos que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. Assim, as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{15}$ são irredutíveis, mas $\frac{6}{10}$ não é.

O conjunto dos números inteiros está contido no conjunto números racionais ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$), pois todo inteiro é uma fração com denominador 1.

Assim, $2 \in \mathbb{Q}$, pois $2 = \frac{2}{1}$.

Números decimais

Notemos que todo número racional $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, pode ser representado por um número decimal. Passa-se um número racional $\frac{a}{b}$ para a forma de número decimal dividindo o inteiro **a** pelo inteiro **b**. Na passagem de uma notação para outra, podem ocorrer dois casos:

i) O número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, diferentes de zero, isto é, uma decimal exata.

Exemplos

1º) $\frac{2}{1} = 2$

2º) $\frac{1}{4} = 0,25$

3º) $\frac{1}{50} = 0,020$

4º) $\frac{1\,037}{10\,000} = 0,1037$

ii) O número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, uma dízima periódica.

Exemplos

1º) $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,\overline{6}$ (período 6)

2º) $\frac{2}{7} = 0,285714285714... = 0,\overline{285714}$ (período 285714)

3º) $\frac{11}{6} = 1,8333... = 1,8\overline{3}$ (período 3)

Podemos notar, também, que todo número na forma de decimal exata ou de dízima periódica pode ser convertido à forma de fração $\frac{a}{b}$ e, portanto, representa um número racional.

Quando a decimal é exata, podemos transformá-la em uma fração cujo numerador é o numeral decimal sem a vírgula e cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado.

1º) $0,3 = \frac{3}{10}$

2º) $0,17 = \frac{17}{100}$

3º) $4,236 = \frac{4\,236}{1\,000}$

4º) $63,4598 = \frac{634\,598}{10\,000}$

Quando a decimal é uma dízima periódica, devemos procurar sua geratriz. A seguir, são dados alguns exemplos de como obter a geratriz de uma dízima periódica.

Exemplo 1

Obter a fração geratriz de 0,444... .

$$\left.\begin{array}{r} x = 0,444... \\ 10x = 4,444... \end{array}\right\} \Rightarrow 10x - x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

Portanto, $0,444... = \frac{4}{9}$.

Regra Prática I

No numerador da fração, coloca-se aquilo que se repete (período); no denominador, tantos noves quantos forem os algarismos que se repetem. No exemplo anterior, só um algarismo (o quatro) se repete; por isso, coloca-se um só 9 no denominador da fração.

Exemplo 2

$0,2323232... = \frac{23}{99}$

Exemplo 3

Obter a fração geratriz de 2,4333... .

$x = 2,4333...$

$$\left.\begin{array}{r} 100x = 243,333... \\ 10x = 24,333... \end{array}\right\} \Rightarrow 100x - 10x = 219 \Rightarrow x = \frac{219}{90} = \frac{73}{30}$$

Regra Prática II

Para formar o numerador, junta-se a parte que não se repete com o período (243) e subtrai-se da parte que não se repete (24). No denominador, coloca-se um 9 para cada algarismo do período e um 0 para cada algarismo que não se repete, após a vírgula.

Exemplo 4

$0,41777... = \frac{417 - 41}{900} = \frac{376}{900} = \frac{94}{225}$

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Números irracionais

Existem números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica. Por exemplo, o numeral decimal 0,1010010001... (em que o número de algarismos 0 intercalados entre os algarismos 1 vai crescendo) é não periódico. Ele representa um número não racional (irracional).

Outros exemplos de números irracionais:

1º) 1,234567891011... **4º)** $\sqrt{2}$

2º) 6,02002000... **5º)** $\sqrt[3]{5}$

3º) 34,56789101112... **6º)** $\sqrt{1+\sqrt{3}}$

OBSERVAÇÕES

i) Dados **α** irracional e **r** racional não nulo, então:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+r\\ \alpha.r\\ \dfrac{\alpha}{r}\\ \dfrac{r}{\alpha}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{são todos números irracionais.}$$

Exemplos

1º) $\sqrt{2}+1$ **3º)** $3\sqrt{2}$

2º) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **4º)** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

São números irracionais.

ii) A soma, subtração, multiplicação ou divisão de dois irracionais pode resultar em um racional ou em um irracional.

Exemplos

1º) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **3º)** $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

2º) $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ **4º)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

São números irracionais

Exemplos

1º) $\sqrt{2}+\left(1-\sqrt{2}\right)=1$ **3º)** $\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$

2º) $\sqrt{2}.\sqrt{8}=4$ **4º)** $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=2$

São números racionais.

Números reais

Chama-se conjunto dos números reais – símbolo $\mathbb{R}$ – àquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (que são números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas (que são números irracionais).

Dessa forma, o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é a união do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) com o conjunto dos números irracionais.

No conjunto $\mathbb{R}$, destacamos cinco subconjuntos:

i) $\mathbb{R}_+$ = conjunto dos reais não negativos.

ii) $\mathbb{R}_-$ = conjunto dos reais não positivos.

iii) $\mathbb{R}^*$ = conjunto dos reais não nulos.

iv) $\mathbb{R}^*_+$ = conjunto dos reais positivos.

v) $\mathbb{R}^*_-$ = conjunto dos reais negativos.

Intervalos reais

Dados dois números reais **a** e **b**, com a < b, definimos:

i) Intervalo aberto de extremos **a** e **b** é o conjunto:

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

a b

ii) Intervalo fechado de extremos **a** e **b** é o conjunto:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

a b

iii) Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita) de extremos **a** e **b** é o conjunto:

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$

a b

iv) Intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda) de extremos **a** e **b** é o conjunto:

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$

a b

Os números reais **a** e **b** são denominados, respectivamente, extremo inferior e extremo superior do intervalo.

Também são intervalos reais os "intervalos infinitos" assim definidos:

i) $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

a

ii) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$

a

iii) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

a

iv) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$

a

MATEMÁTICA

CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

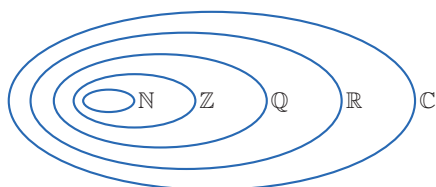
Vimos que $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ qualquer que seja o real **a** não negativo. Assim, por exemplo, $\sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{7}$ são números reais.

Se o índice da raiz for ímpar, os radicais da forma $\sqrt[n]{-a}$, em que $a \in \mathbb{R}_+$, também representam números reais. É o caso, por exemplo, de $\sqrt[5]{-3}$.

Por outro lado, se o radicando é negativo, e o índice da raiz é par, o radical $\sqrt[n]{-a}$ não representa elemento de $\mathbb{R}$. Por exemplo, $\sqrt{-1}$ não é real, pois $\sqrt{-1} = x \Rightarrow -1 = x^2$, o que é impossível, pois se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$.

Para resolver esse problema com $\sqrt[n]{a}$, introduzimos o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, do qual $\mathbb{R}$ é um subconjunto.

RESUMO

Os conjuntos numéricos podem ser representados esquematicamente pela figura a seguir:

Observemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notemos também que:

i) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ = conjunto dos números inteiros negativos.

ii) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ = conjunto dos números racionais não inteiros.

iii) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = conjunto dos números reais irracionais.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (PUC Rio) A soma 1,3333... + 0,16666... é igual a

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

02. (PUC-Campinas-SP) Considere os conjuntos:

$\mathbb{N}$, dos números naturais,

$\mathbb{Q}$, dos números racionais,

$\mathbb{Q}_+$, dos números racionais não negativos,

$\mathbb{R}$, dos números reais.

O número que expressa

A) a quantidade de habitantes de uma cidade é um elemento de $\mathbb{Q}_+$, mas não de $\mathbb{N}$.

B) a medida da altura de uma pessoa é um elemento de $\mathbb{N}$.

C) a velocidade média de um veículo é um elemento de $\mathbb{Q}$, mas não de $\mathbb{Q}_+$.

D) o valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento de $\mathbb{Q}_+$.

E) a medida do lado de um triângulo é um elemento de $\mathbb{Q}$.

03. (UFJF-MG) Marque a alternativa **INCORRETA** a respeito dos números reais.

A) Se a representação decimal infinita de um número é periódica, então esse número é racional.

B) Se a representação decimal de um número é finita, então esse número é racional.

C) Todo número irracional tem uma representação decimal infinita.

D) Todo número racional tem uma representação decimal finita.

04. (UFMG) Considere **x**, **y** e **z** números naturais. Na divisão de **x** por **y**, obtêm-se quociente **z** e resto 8. Sabe-se que a representação decimal de $\frac{x}{y}$ é a dízima periódica 7,363636... . Então, o valor de x + y + z é

A) 190 B) 193 C) 191 D) 192

05. Assinale a afirmativa **VERDADEIRA**.

A) A soma de dois números irracionais positivos é um número irracional.

B) O produto de dois números irracionais distintos é um número irracional.

C) O quadrado de um número irracional é um número racional.

D) A raiz quadrada de um número racional é um número irracional.

E) A diferença entre um número racional e um número irracional é um número irracional.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFOP-MG–2009) A respeito dos números a = 0,499999... e b = 0,5, é **CORRETO** afirmar:

A) b = a + 0,011111...

B) a = b

C) **a** é irracional e **b** é racional.

D) a < b

02. (UFJF-MG) Dados os intervalos A = [–1, 3), B = [1, 4], C = [2, 3), D = (1, 2] e E = (0, 2], consideremos o conjunto $P = [(A \cup B) - (C \cap D)] - E$. Marque a alternativa **INCORRETA**.

A) $P \subset [-1, 4]$

B) $(3, 4] \subset P$

C) $2 \in P$

D) $0 \in P$

03. (UEL-PR) Observe os seguintes números.

I. 2,212121...

II. 3,212223...

III. $\frac{\pi}{5}$

IV. 3,1416

V. $\sqrt{-4}$

Assinale a alternativa que identifica os números irracionais.

A) I e II

B) I e IV

C) II e III

D) II e V

E) III e V

04. (Unifor-CE) Qual, entre os números seguintes, é racional?

A) $\sqrt{\pi^4}$

B) $\sqrt[3]{0,1}$

C) $\sqrt[3]{0,27}$

D) $\sqrt[3]{-0,064}$

E) $\sqrt[4]{0,016}$

05. (UFG) Sejam os conjuntos:

$$A = \{2n: n \in \mathbb{Z}\} \text{ e } B = \{2n - 1: n \in \mathbb{Z}\}$$

Sobre esses conjuntos, pode-se afirmar:

I. $A \cap B = \varnothing$.

II. **A** é o conjunto dos números pares.

III. $B \cup A = \mathbb{Z}$.

Está **CORRETO** o que se afirma em

A) I e II, apenas.

B) II, apenas.

C) II e III, apenas.

D) III, apenas.

E) I, II e III.

06. (Fatec–SP) Sejam **a** e **b** números irracionais. Das afirmações,

I. ab é um número irracional.

II. a + b é um número irracional.

III. a – b pode ser um número irracional.

pode-se concluir que

A) as três são falsas.

B) as três são verdadeiras.

C) somente I e III são verdadeiras.

D) somente I é verdadeira.

E) somente I e II são falsas.

07. (CEFET-MG–2008) Sejam **p** e **q** inteiros positivos de forma que a fração irredutível $\frac{p}{q}$ seja igual à dízima 0,656565... . O valor de $y = \left(\frac{p-1}{q+1}\right)^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{q-18}{3(p-1)}\right]^{\frac{1}{3}}$ é

A) $\frac{65}{30}$ B) $\frac{5}{27}$ C) $\frac{45}{28}$ D) $\frac{1}{20}$ E) $\frac{4}{27}$

08. (UFMG–2006) Considere o conjunto de números racionais $M = \left\{\frac{5}{9}, \frac{3}{7}, \frac{5}{11}, \frac{4}{7}\right\}$. Sejam **x** o menor elemento de **M** e **y** o maior elemento de **M**. Então, é **CORRETO** afirmar que

A) $x = \frac{5}{9}$ e $y = \frac{4}{7}$

B) $x = \frac{3}{7}$ e $y = \frac{5}{9}$

C) $x = \frac{3}{7}$ e $y = \frac{4}{7}$

D) $x = \frac{5}{11}$ e $y = \frac{5}{9}$

09. (UFC) Sejam **x** e **y** números reais, tais que

$$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3},\ \frac{2}{3} < y < \frac{3}{4} \text{ e } A = 3x - 2y$$

Então, é **CORRETO** afirmar que

A) $\frac{4}{3} < A < \frac{5}{2}$

B) $\frac{3}{4} < A < 1$

C) $-\frac{4}{3} < A < -\frac{3}{4}$

D) $-\frac{3}{4} < A < -\frac{1}{3}$

E) $-\frac{1}{3} < A < 0$

10. (PUC-SP) Um número racional qualquer

A) tem sempre um número finito de ordens (casas) decimais.

B) tem sempre um número infinito de ordens (casas) decimais.

C) não pode expressar-se na forma decimal exata.

D) nunca se expressa na forma de uma decimal inexata.

E) N.d.a.

11. (PUC-SP) Sabe-se que o produto de dois números irracionais pode ser um número racional. Um exemplo é

A) $\sqrt{12}.\sqrt{3} = \sqrt{36}$

B) $\sqrt{4}.\sqrt{9} = 6$

C) $\sqrt{3}.1 = \sqrt{3}$

D) $\sqrt{2}.2 = \sqrt{8}$

E) $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$

12. (FGV-SP) Assinalando **V** ou **F** se as sentenças a seguir são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**,

1. ( ) $\mathbb{N} \supset \mathbb{Q}$
2. ( ) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$
3. ( ) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{N}$
4. ( ) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$

obtemos

A) F V F V

B) V V V V

C) F V V F

D) F V V V

E) V V V F

13. (UFJF-MG) Marque a alternativa **INCORRETA**.

A) Se **x** e **y** são números racionais, então x + y é um número racional.

B) Se **x** e **y** são números irracionais, então x + y é um número irracional.

C) Se **x** e **y** são números racionais, então xy é um número racional.

D) Se **x** é um número racional e **y** é um número irracional, então x + y é um número irracional.

14. (FUVEST-SP) Dados dois números reais **a** e **b** que satisfazem as desigualdades 1 < a < 2 e 3 < b < 5, pode-se afirmar que

A) $\frac{a}{b} < \frac{2}{5}$

B) $\frac{a}{b} > \frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{5} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{5} < \frac{a}{b} < \frac{1}{2}$

E) $\frac{3}{2} < \frac{a}{b} < 5$

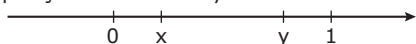
MATEMÁTICA

15. (PUC Minas) Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 3\}$, é **CORRETO** afirmar:

A) $A \cup B = A$
B) $A \cup B \subset \mathbb{Z}$
C) $A \cap B = A$
D) $A \cap B \subset \mathbb{Z}$
E) $A \cap B = B$

16. Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z}: x = 6n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z}: x = 3n, n \in \mathbb{Z}\}$, então $A \cap B$ é igual a

A) $\{x \in \mathbb{Z}$: **x** é ímpar e múltiplo de 3$\}$.
B) $\{x \in \mathbb{Z}$: **x** é par e múltiplo de 3$\}$.
C) $\{x \in \mathbb{Z}$: **x** é múltiplo de 3$\}$.
D) $\{x \in \mathbb{Z}$: **x** é múltiplo de 9$\}$.
E) $\{x \in \mathbb{Z}$: **x** é ímpar$\}$.

17. (FUVEST-SP) Na figura, estão representados geometricamente os números reais 0, **x**, **y** e 1. Qual a posição do número xy?

A) À esquerda de 0.
B) Entre 0 e **x**.
C) Entre **x** e **y**.
D) Entre **y** e 1.
E) À direita de 1.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) A Música e a Matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte:

Um compasso é uma unidade musical composta de determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras. Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é $\frac{3}{4}$, poderia ser preenchido com

A) 24 fusas.
B) 3 semínimas.
C) 8 semínimas.
D) 24 colcheias e 12 semínimas.
E) 16 semínimas e 8 semicolcheias.

02. (Enem–2009 / Anulada) No calendário utilizado atualmente, os anos são numerados em uma escala sem o zero, isto é, não existe o ano zero. A Era Cristã se inicia no ano 1 depois de Cristo (d.C.) e designa-se o ano anterior a esse como ano 1 antes de Cristo (a.C.). Por essa razão, o primeiro século ou intervalo de 100 anos da era cristã terminou no dia 31 de dezembro do ano 100 d.C., quando haviam decorrido os primeiros 100 anos após o início da era. O século II começou no dia 1 de janeiro do ano 101 d.C., e assim sucessivamente. Como não existe o ano zero, o intervalo entre os anos 50 a.C. e 50 d.C., por exemplo, é de 100 anos. Outra forma de representar anos é utilizando-se números inteiros, como fazem os astrônomos. Para eles, o ano 1 a.C. corresponde ao ano 0, o ano 2 a.C. ao ano −1, e assim sucessivamente. Os anos depois de Cristo são representados pelos números inteiros positivos, fazendo corresponder o número 1 ao ano 1 d.C. Considerando o intervalo de 3 a.C. a 2 d.C., o quadro que relaciona as duas contagens descritas no texto é:

A)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	−1	0	1	2	3

B)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	−2	−1	0	1	2

C)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	−2	−1	1	2	3

D)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	−3	−2	−1	1	2

E)

Calendário atual	3 a.C.	2 a.C.	1 a.C.	1 d.C.	2 d.C.
Cômputo dos astrônomos	−3	−2	−1	0	1

GABARITO

Fixação

01. E 02. D 03. D 04. C 05. E

Propostos

01. B
02. C
03. C
04. D
05. E
06. E
07. D
08. C
09. D
10. E
11. A
12. A
13. B
14. C
15. D
16. A
17. B

Seção Enem

01. D 02. B

MATEMÁTICA

MÓDULO 01 | FRENTE D

Noções primitivas de geometria plana

INTRODUÇÃO

Na geometria plana, ponto, reta e plano são conceitos primitivos. Neste texto, vamos designar pontos por letras maiúsculas (A, B, C, ...), retas por letras minúsculas (r, s, t, ...) e planos por letras gregas (α, β, γ, ...).

Em nosso estudo, faremos uso de alguns postulados (ou axiomas), que são verdades aceitas sem demonstração, e de teoremas (ou proposições), afirmações que podem ser demonstradas.

São exemplos de postulados:

P1) Numa reta, bem como num plano, há infinitos pontos;

P2) Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém;

P3) Três pontos distintos não colineares determinam um único plano que os contém.

São exemplos de teoremas, que serão demonstrados posteriormente:

T1) Em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a 180º;

T2) Em qualquer quadrilátero, a soma dos ângulos internos é igual a 360º.

Segmento de reta

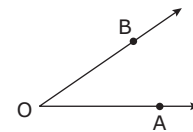
Dados dois pontos distintos, **A** e **B**, na reta **r**, a reunião desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles, em **r**, é o segmento de reta $\overline{AB}$.

Semirreta

Dados dois pontos distintos, **A** e **B**, na reta **r**, define-se semirreta $\overrightarrow{AB}$ como a reunião dos pontos com origem em **A** e sentido para **B**.

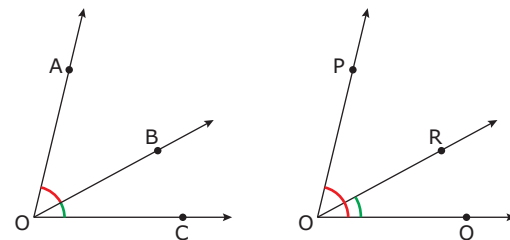
ÂNGULOS

Definição

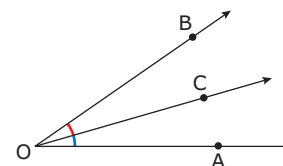
Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).

Indica-se: $\angle AOB$, $\angle BOA$, $A\hat{O}B$, $B\hat{O}A$ ou $\hat{O}$.

Nomenclatura: vértice **O** e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

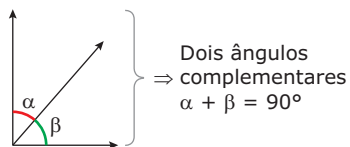
Ângulos consecutivos

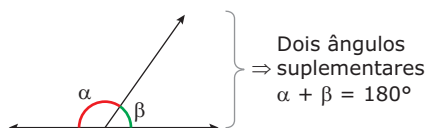
Dois ângulos são consecutivos se eles possuem um lado em comum.

Nas figuras, os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ (assim como os $P\hat{O}Q$ e $R\hat{O}Q$) são consecutivos.

Ângulos adjacentes

Dois ângulos consecutivos, que não possuem ponto interior comum, são chamados de ângulos adjacentes.

Na figura, $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são ângulos adjacentes.

Ângulos complementares

Dois ângulos são complementares se, e somente se, a soma de suas medidas for 90º $\left(\frac{\pi}{2}\text{ radianos}\right)$. Dizemos, nesse caso, que um dos ângulos é o complemento do outro.

Ângulos suplementares

Dois ângulos são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas for 180º (π radianos). Dizemos, nesse caso, que um dos ângulos é o suplemento do outro.

Exemplo

O suplemento do dobro de um ângulo excede em 30º o triplo do complemento desse ângulo. Determinar o ângulo.

Ângulo: **x**

Complemento do ângulo: 90º – x

Suplemento do dobro do ângulo: 180º – 2x

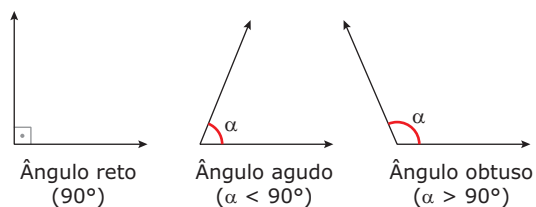
Equacionando, teremos:

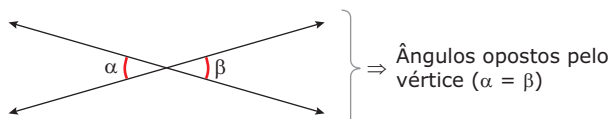
$180º - 2x = 30º + 3(90º - x) \Rightarrow x = 120º$

Classificação

i) Ângulo reto é todo ângulo cuja medida é 90°.

ii) Ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.

iii) Ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.

Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes (possuem a mesma medida).

RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

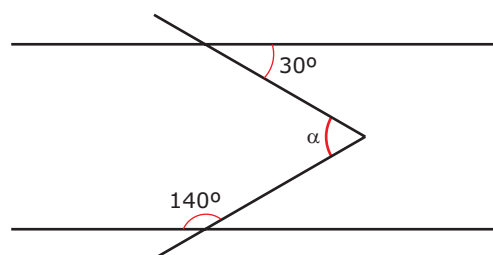
Duas retas **r** e **s**, paralelas distintas, e uma transversal **t** determinam oito ângulos geométricos, conforme a figura. Dois quaisquer desses ângulos ou são suplementares ou são congruentes.

Correspondentes	a = e b = f d = h c = g
Alternos	internos: b = h, c = e externos: a = g, d = f
Colaterais	internos: b + e = 180°, c + h = 180° externos: a + f = 180°, d + g = 180°

OBSERVAÇÃO

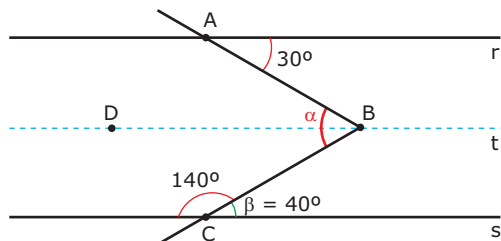
Se uma reta transversal **t** determina com duas retas coplanares, **r** e **s**, ângulos alternos congruentes, então r // s.

Exemplo

Na figura a seguir, as retas **r** e **s** são paralelas. Determinar **α**.

Resolução:

Sejam os pontos **A**, **B** e **C** e o ângulo **β**.

Os ângulos 140º e **β** são suplementares, ou seja, β = 40º.

Trace a reta tracejada **t** paralela às retas **r** e **s**, passando por **B**. Seja **D** um ponto da reta **t**.

Os ângulos de medidas 30º e $\hat{ABD}$ são alternos internos, ou seja, $\hat{ABD}$ = 30º.

Os ângulos de medidas 40º e $\hat{CBD}$ são alternos internos, ou seja, $\hat{CBD}$ = 40º.

Assim: α = $\hat{ABD}$ + $\hat{CBD}$ = 70º

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. **CALCULE**:

A) O complemento de um ângulo mede 38°. Qual é esse ângulo?

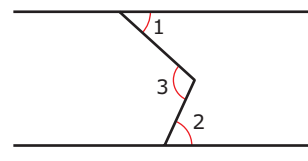
B) $\frac{2}{3}$ do complemento de um ângulo mais $\frac{1}{5}$ do suplemento do mesmo ângulo perfazem 70°. Qual é esse ângulo?

02. A medida **x** de um ângulo tem 80º a mais que a medida de seu suplemento. **DETERMINE x**.

03. (UFU-MG) Dois ângulos consecutivos são complementares. Então, o ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos é

A) 20°
B) 30°
C) 35°
D) 40°
E) 45°

04. (VUNESP-SP) **CALCULE** em graus e minutos a medida do ângulo descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio, durante o tempo de 135 segundos.

05. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, as retas **r** e **s** são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. A medida, em graus, do ângulo 3 é

A) 50
B) 55
C) 60
D) 80
E) 100

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Um ângulo excede o seu complemento em 48°. **DETERMINE** o suplemento desse ângulo.

02. O complemento da terça parte de um ângulo excede o complemento desse ângulo em 30°. **DETERMINE** o ângulo.

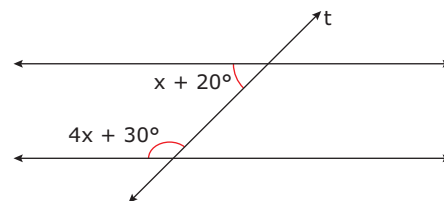
03. O suplemento do triplo do complemento da metade de um ângulo é igual ao triplo do complemento desse ângulo. **DETERMINE** o ângulo.

04. **DETERMINE** dois ângulos complementares tais que o dobro de um, aumentado da terça parte do outro, seja igual a um ângulo reto.

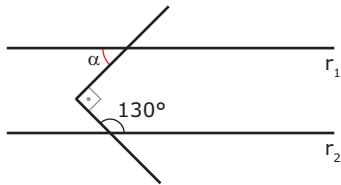
05. As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um ângulo de 52°. Se um deles mede 40°, qual é a medida do outro?

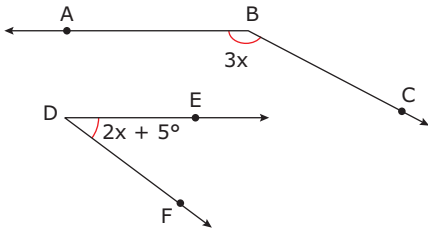
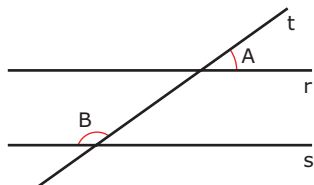
06. (UNAERP-SP) As retas **r** e **s** são interceptadas pela transversal **t**, conforme a figura. O valor de **x** para que **r** e **s** sejam paralelas é

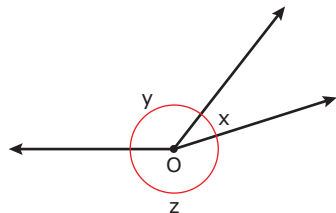
A) 20°
B) 26°
C) 28°
D) 30°
E) 35°

MATEMÁTICA

07. (PUC-SP) Um ângulo mede a metade de seu complemento. Então, esse ângulo mede

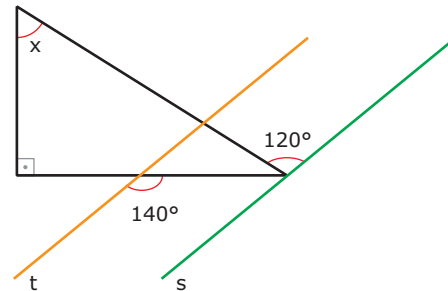
A) 30° B) 60° C) 45° D) 90° E) 68°

08. (UNIRIO-RJ) As retas r_1 e r_2 são paralelas. O valor do ângulo **α**, apresentado na figura a seguir, é

A) 40° B) 45° C) 50° D) 65° E) 130°

09. **CALCULE** os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$, em que $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ // $\overleftrightarrow{DF}$.

10. (Cesgranrio) As retas **r** e **s** da figura são paralelas cortadas pela transversal **t**. Se o ângulo $\hat{B}$ é o triplo de $\hat{A}$, então $\hat{B} - \hat{A}$ vale

A) 90°
B) 85°
C) 80°
D) 75°
E) 60°

11. (UEL-PR) Na figura a seguir, as medidas **x**, **y** e **z** são diretamente proporcionais aos números 5, 20 e 25, respectivamente.

O suplemento do ângulo de medida **x** tem medida igual a

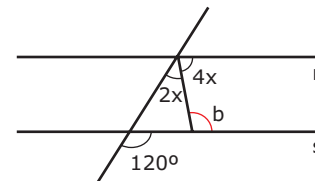
A) 144°
B) 128°
C) 116°
D) 82°
E) 54°

12. (FUVEST-SP) As retas **t** e **s** são paralelas. A medida do ângulo **x**, em graus, é

A) 30
B) 40
C) 50
D) 60
E) 70

13. (Cesgranrio) Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, de modo que a soma de dois dos ângulos agudos formados vale 72°. Então, qualquer dos ângulos obtusos formados mede

A) 142°
B) 144°
C) 148°
D) 150°
E) 152°

14. (UFG) Na figura a seguir, as retas **r** e **s** são paralelas. A medida do ângulo **b** é

A) 100º
B) 120º
C) 110º
D) 140º
E) 130º

15. (UFES) O triplo do complemento de um ângulo é igual à terça parte do suplemento desse ângulo. Esse ângulo mede

A) $\frac{7\pi}{8}$ rad

B) $\frac{5\pi}{16}$ rad

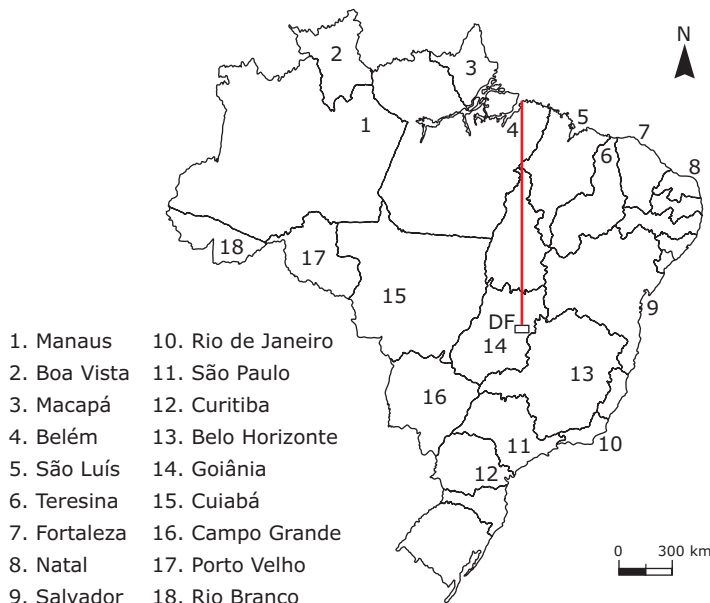
C) $\frac{7\pi}{4}$ rad

D) $\frac{7\pi}{16}$ rad

E) $\frac{5\pi}{8}$ rad

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI que partiu de Brasília-DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.

Mapa do Brasil e algumas capitais

SIQUEIRA, S. *Brasil Regiões*. Disponível em: <www.santiagosiqueira.pro.br>. Acesso em: 28 jul 2009 (Adaptação).

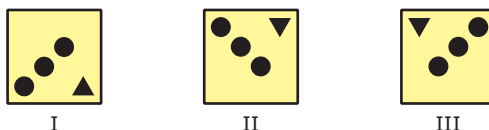
Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo de 135 graus no sentido horário com a rota Brasília-Belém, e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AII ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em

A) Belo Horizonte, e, em seguida, embarcou para Curitiba.
B) Belo Horizonte, e, em seguida, embarcou para Salvador.
C) Boa Vista, e, em seguida, embarcou para Porto Velho.
D) Goiânia, e, em seguida, embarcou para o Rio de Janeiro.
E) Goiânia, e, em seguida, embarcou para Manaus.

02. (Enem–2009 / Anulada) Um decorador utilizou um único tipo de transformação geométrica para compor pares de cerâmicas em uma parede. Uma das composições está representada pelas cerâmicas indicadas por I e II.

I

II

III

Utilizando a mesma transformação, qual é a figura que compõe par com a cerâmica indicada por III?

A)

B)

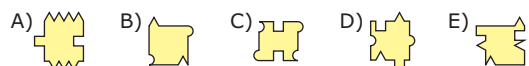
C)

D)

E)

03. (Enem–2009 / Anulada) Uma das expressões artísticas mais famosas associada aos conceitos de simetria e congruência é, talvez, a obra de Maurits Cornelis Escher, artista holandês cujo trabalho é amplamente difundido. A figura apresentada, de sua autoria, mostra a pavimentação do plano com cavalos claros e cavalos escuros, que são congruentes e se encaixam sem deixar espaços vazios.

Realizando procedimentos análogos aos feitos por Escher, entre as figuras a seguir, aquela que poderia pavimentar um plano, utilizando-se peças congruentes de tonalidades claras e escuras é

A) B) C) D)   E)

04. (Enem–2009) As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura **A** e 8 peças no tabuleiro da figura **B**. As peças são retiradas do tabuleiro da figura **B** e colocadas no tabuleiro da figura **A** na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.

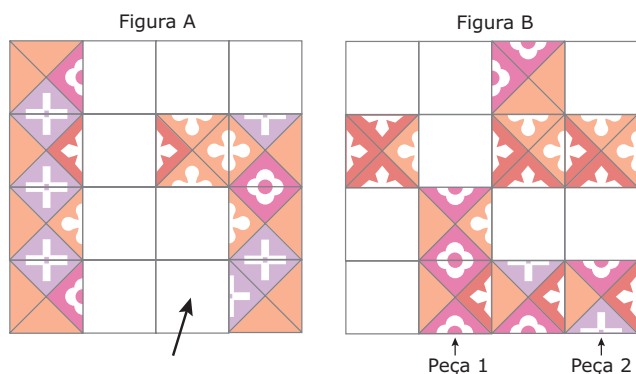



Figura A

Figura B

Disponível em: <http://pt.eternityii.com>. Acesso em: 14 jul. 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura **A** colocando a peça

A) 1 após girá-la 90° no sentido horário.
B) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.
C) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.
D) 2 após girá-la 180° no sentido horário.
E) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

GABARITO

Fixação

01. A) 52º
    B) 30º
02. 130º
03. E
04. 13° 30’
05. E

Propostos

01. 111º
02. 45º
03. 80º
04. 36º e 54º
05. 64º ou 144º
06. B
07. A
08. A
09. O ângulo $\hat{B}$ vale 105°, e o ângulo $\hat{D}$ vale 75°.
10. A
11. A
12. E
13. B
14. A
15. D

Seção Enem

01. B
02. B
03. B e D
04. C

MATEMÁTICA

Triângulos e pontos notáveis

MÓDULO 02 FRENTE D

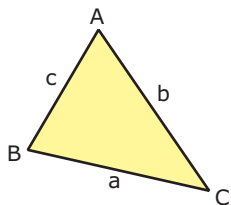
TRIÂNGULOS

Considere três pontos não colineares **A**, **B** e **C**. A união dos três segmentos de reta $(\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC})$ com extremidades nos três pontos é denominada triângulo ABC (indicação: Δ ABC).

Elementos

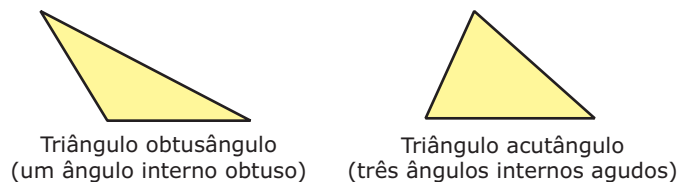
i) Vértices: São os pontos **A**, **B** e **C**.

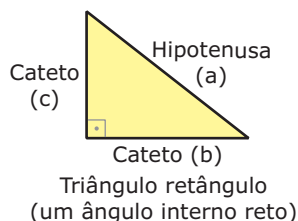
ii) Lados: São os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, de medidas **a**, **b** e **c** indicadas na figura.

iii) Ângulos internos: $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.

O perímetro de um triângulo é a soma das medidas dos lados. Representamos o perímetro por 2p e o semiperímetro por **p**. Assim, no triângulo ABC anterior, tem-se:

$$2p = a + b + c \quad e \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

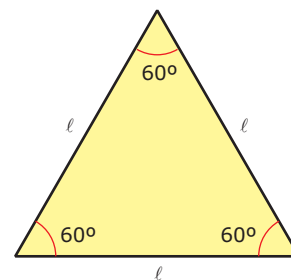
Classificação

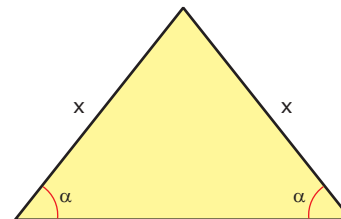
Quanto à medida dos seus ângulos internos, podemos classificar os triângulos em:

Triângulo obtusângulo (um ângulo interno obtuso)

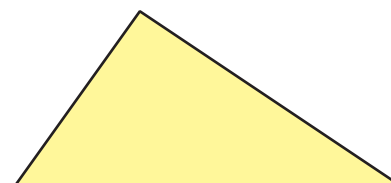
Triângulo acutângulo (três ângulos internos agudos)

Triângulo retângulo (um ângulo interno reto)

Sabemos que, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Quanto à medida dos seus lados, podemos classificar os triângulos em:

i) Triângulo equilátero: Os três lados são congruentes entre si, e os três ângulos medem 60º.

Triângulo equilátero

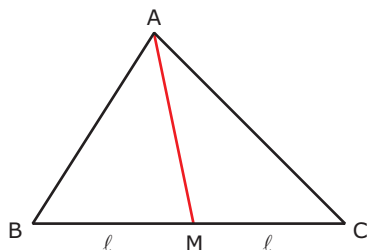
ii) Triângulo isósceles: Possui pelo menos dois lados congruentes. O lado de medida diferente, caso exista, é chamado base, e o ângulo oposto à base é chamado ângulo do vértice. Os ângulos da base (opostos a lados de medidas iguais) são congruentes. Observe que todo triângulo equilátero é isósceles.

Triângulo isósceles

iii) Triângulo escaleno: Os três lados e os três ângulos são diferentes entre si.

Triângulo escaleno

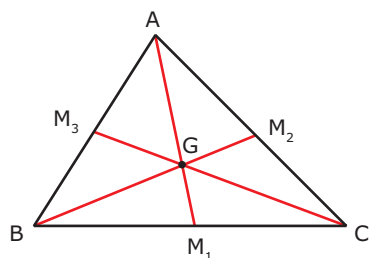
PONTOS NOTÁVEIS

Baricentro

Mediana de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Na figura, $\overline{AM}$ é mediana do triângulo ABC, relativa ao lado $\overline{BC}$.

Propriedades

i) As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, chamado baricentro.

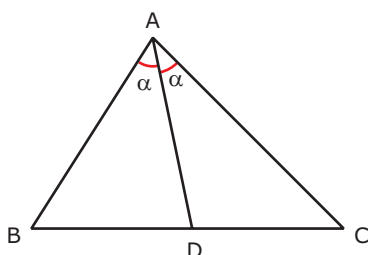
ii) O baricentro divide cada uma das medianas na proporção de 2 para 1 (do vértice ao ponto médio).

$AG = 2.GM_1$

$BG = 2.GM_2$

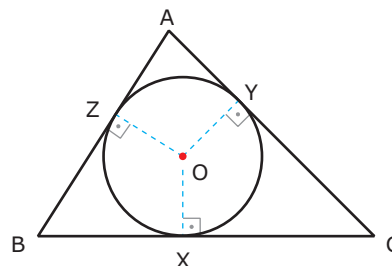
$CG = 2.GM_3$

Incentro

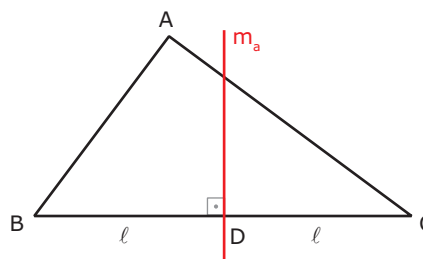
Bissetriz interna de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice ao lado oposto e divide o ângulo do vértice ao meio.

Na figura, $\overline{AD}$ é a bissetriz interna do triângulo ABC relativa ao vértice **A**, e $B\hat{A}D = D\hat{A}C$.

Propriedades

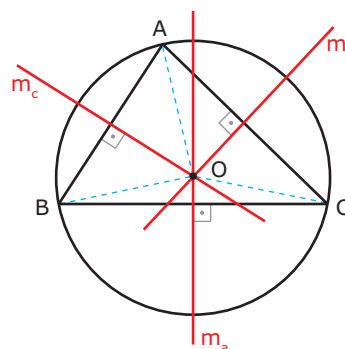
i) As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, chamado incentro.

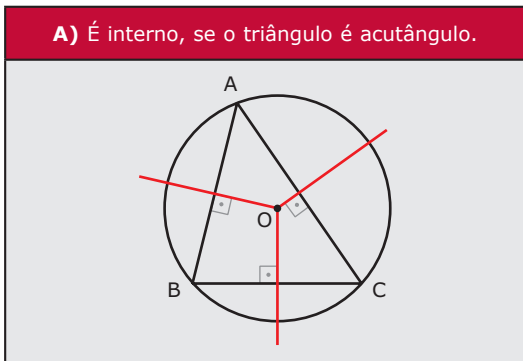
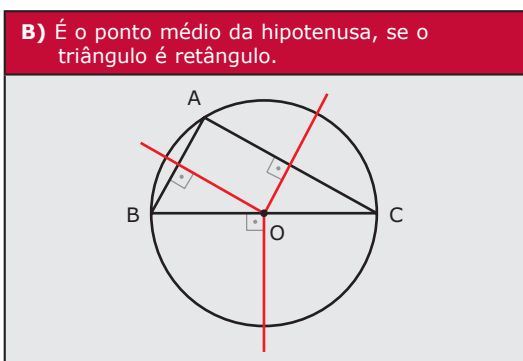
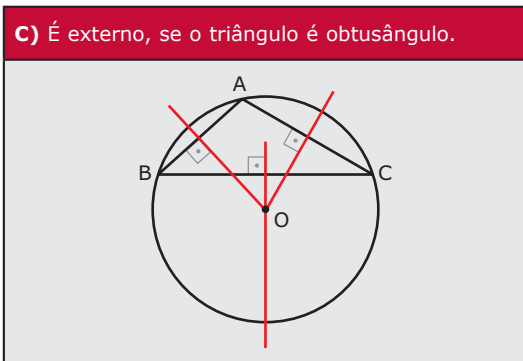
ii) O incentro é equidistante dos lados; portanto, é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC.

Circuncentro

Mediatriz de um lado de um triângulo é a reta perpendicular a esse lado pelo seu ponto médio.

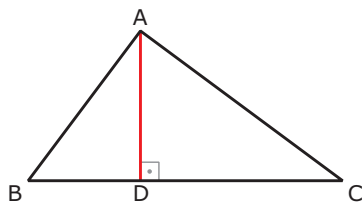
Na figura, m_a é mediatriz do triângulo ABC, relativa ao lado $\overline{BC}$.

Propriedades

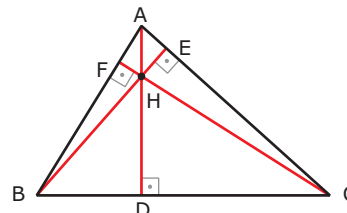
i) As três mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, chamado circuncentro.

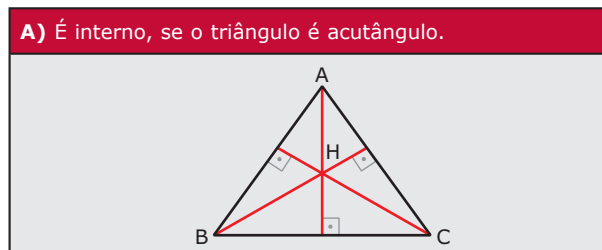
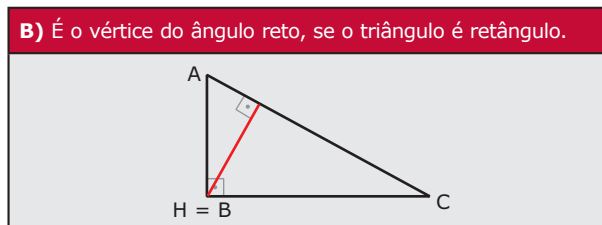
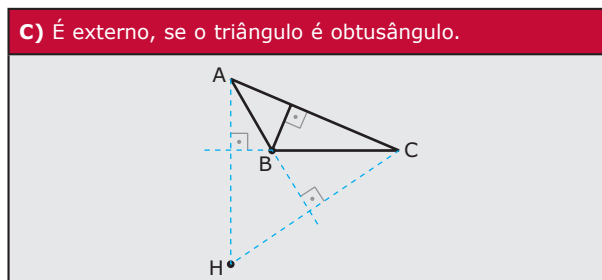
ii) O circuncentro é equidistante dos vértices; portanto, é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Posição do circuncentro em relação a um triângulo

A) É interno, se o triângulo é acutângulo.

B) É o ponto médio da hipotenusa, se o triângulo é retângulo.

C) É externo, se o triângulo é obtusângulo.

Ortocentro

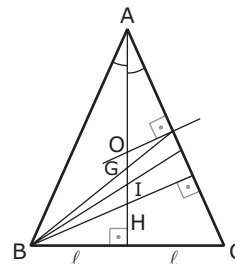
Altura de um triângulo é o segmento de reta traçado de um vértice à reta suporte do lado oposto, perpendicularmente a esta.

Nesta figura, $\overline{AD}$ é a altura do triângulo ABC, relativa ao lado $\overline{BC}$.

Propriedade

As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, denominado ortocentro.

Posição do ortocentro em relação a um triângulo

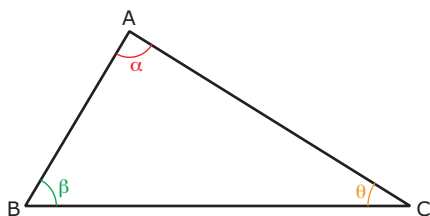
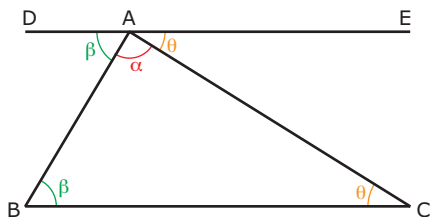
A) É interno, se o triângulo é acutângulo.

B) É o vértice do ângulo reto, se o triângulo é retângulo.

C) É externo, se o triângulo é obtusângulo.

OBSERVAÇÕES

i) Em um triângulo isósceles, o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro são colineares.

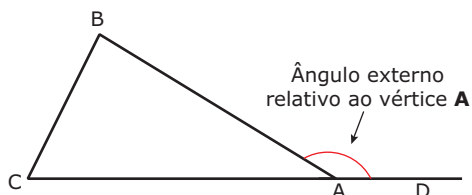
MATEMÁTICA

ii) Em um triângulo equilátero, os quatro pontos notáveis são coincidentes.

TEOREMAS

Soma dos ângulos internos de um triângulo

Considere um triângulo qualquer ABC cujos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ têm medidas **α**, **β** e **θ**, respectivamente.

Traçando por **A** a reta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela a $\overline{BC}$, determinamos ângulos alternos internos congruentes.

Como o ângulo $D\hat{A}E$ mede 180°, concluímos que:

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

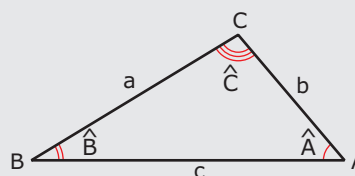
Ângulo externo de um triângulo

O ângulo $B\hat{A}D$ é adjacente e suplementar de um ângulo interno do triângulo ABC; por isso, $B\hat{A}D$ é chamado de ângulo externo desse triângulo.

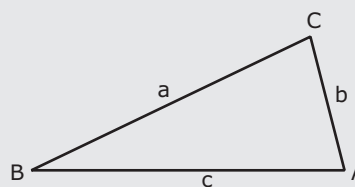
Sendo **α** e **β** as medidas dos ângulos internos **C** e **B**, respectivamente, e indicando por a_e a medida do ângulo externo relativo ao vértice **A**,

temos $\alpha + \beta + 180^\circ - a_e = 180^\circ \Rightarrow a_e = \alpha + \beta$, isto é:

A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Desigualdades nos triângulos

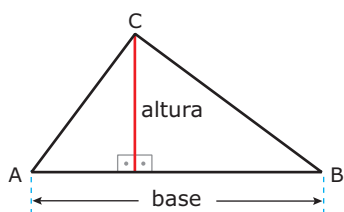
A) Dados dois lados de um triângulo, de medidas diferentes, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

$$b < a < c \Leftrightarrow \hat{B} < \hat{A} < \hat{C}$$

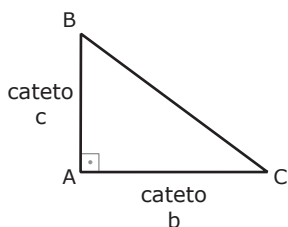
B) Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

$a < b + c$ $\quad$ $b < a + c$ $\quad$ $c < a + b$

As três desigualdades citadas são equivalentes a:

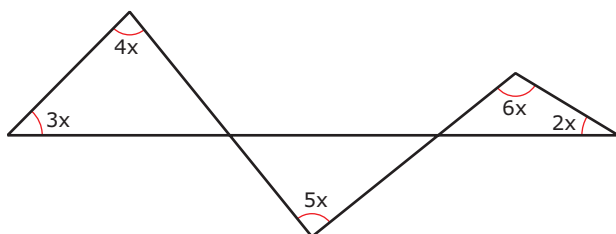
$$|b - c| < a < b + c$$

Área de um triângulo

Para calcularmos a área de um triângulo fazemos metade do produto de um dos lados (base) pela altura relativa a ele. No triângulo ABC a seguir, temos:

$$\text{Área}_{\Delta ABC} = \frac{\text{base}.\text{altura}}{2}$$

Se o triângulo for retângulo e considerarmos como base um dos catetos, o outro cateto será a altura, e a área será igual ao semiproduto dos catetos:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{b.c}{2}$$

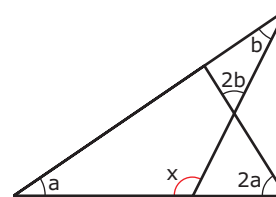
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFU-MG) Na figura a seguir, o ângulo **x**, em graus, pertence ao intervalo

A) (0°, 15°)

B) (15°, 20°)

C) (20°, 25°)

D) (25°, 30°)

02. (UFMG) Observe a figura.

Nela, a, 2a, b, 2b e x representam as medidas, em graus, dos ângulos assinalados. O valor de **x**, em graus, é

A) 100

B) 110

C) 115

D) 120

03. (UFES) Um dos ângulos internos de um triângulo isósceles mede 100°. Qual é a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos outros ângulos internos?

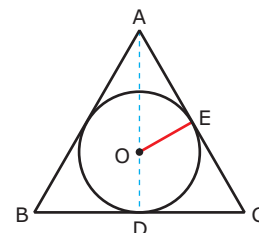
A) 20°

B) 40°

C) 60°

D) 80°

E) 140°

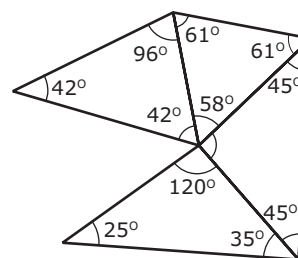
04. (PUC Minas) Na figura, o triângulo ABC é equilátero e está circunscrito ao círculo de centro **O** e raio 2 cm. $\overline{AD}$ é altura do triângulo. Sendo **E** ponto de tangência, a medida de $\overline{AE}$, em centímetros, é

A) $2\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{5}$

C) 3

D) 5

E) $\sqrt{26}$

05. (UFPE) Na figura a seguir, **DETERMINE** o ângulo que é oposto ao lado de menor comprimento.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UNITAU-SP) O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é denominado

A) mediana.

B) mediatriz.

C) bissetriz.

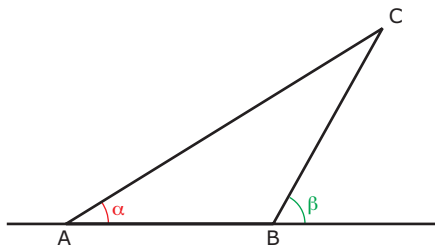
D) altura.

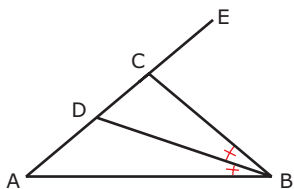
E) base.

02. (UFU-MG) Considere o triângulo ABC, a seguir, e **D** um ponto no lado $\overline{AC}$, tal que AD = BD = BC = 1 cm. Nesse caso, a relação existente entre os ângulos indicados **α** e **β** é

A) $\beta + 2\alpha = \pi$

B) $\beta = 2\alpha$

C) $\beta = 3\alpha$

D) $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$

03. (UFMG) Observe a figura:

$\overline{BD}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$, $E\hat{C}B = 2.(E\hat{A}B)$ e a medida do ângulo $E\hat{C}B$ é 80º. A medida do ângulo $C\hat{D}B$ é

A) 40º

B) 50º

C) 55º

D) 60º

E) 65º

04. (UNIFESP-SP–2008) Tem-se um triângulo equilátero em que cada lado mede 6 cm. O raio do círculo circunscrito a esse triângulo, em centímetros, mede

A) $\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

C) 4

D) $3\sqrt{2}$

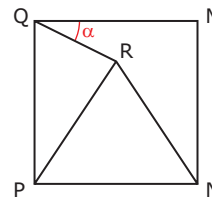
E) $3\sqrt{3}$

05. (Unimontes-MG–2009) Na figura a seguir, MNPQ é um quadrado, e NPR é um triângulo equilátero. O ângulo **α** mede

A) 30º

B) 15º

C) 75º

D) 25º

06. (UFF-RJ) O triângulo MNP é tal que o ângulo $\hat{M}$ = 80° e o ângulo $\hat{P}$ = 60°. A medida do ângulo formado pela bissetriz do ângulo interno $\hat{N}$ com a bissetriz do ângulo externo $\hat{P}$ é

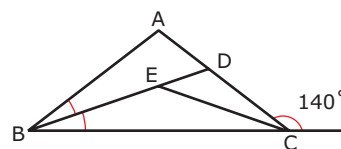
A) 20°

B) 30°

C) 40°

D) 50°

E) 60°

07. (UFMG) Observe a figura:

Nessa figura, $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, $\overline{BD}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$, $\overline{CE}$ é bissetriz de $B\hat{C}D$ e a medida do ângulo $A\hat{C}F$ é 140º. A medida do ângulo $D\hat{E}C$, em graus, é

A) 20

B) 30

C) 40

D) 50

E) 60

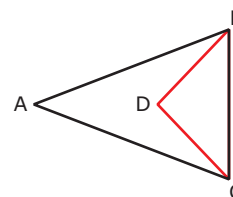
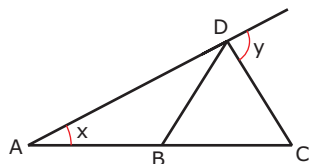
08. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, AB = AC, **D** é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo ABC, e o ângulo $\hat{D}$ é o triplo do ângulo $\hat{A}$. Então, a medida de $\hat{A}$ é

A) 18º

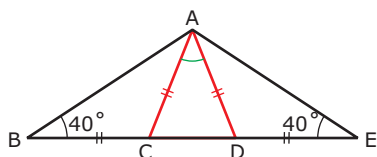
B) 12º

C) 24º

D) 36º

E) 15º

09. (FUVEST-SP) Na figura, AB = BD = CD. Então,

A) y = 3x
B) y = 2x
C) x + y = 180º
D) x = y
E) 3x = 2y

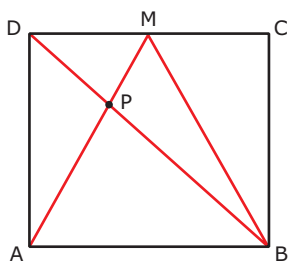
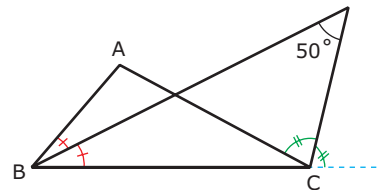
10. (PUC-SP) Na figura, BC = CA = AD = DE. O ângulo $C\hat{A}D$ mede

A) 10º
B) 20º
C) 30º
D) 40º
E) 60º

11. (UFMT–2006) Deseja-se instalar uma fábrica num lugar que seja equidistante dos municípios **A**, **B** e **C**. Admita que **A**, **B** e **C** são pontos não colineares de uma região plana e que o triângulo ABC é escaleno. Nessas condições, o ponto onde a fábrica deverá ser instalada é o

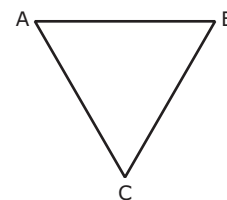
A) centro da circunferência que passa por **A**, **B** e **C**.
B) baricentro do triângulo ABC.
C) ponto médio do segmento BC.
D) ponto médio do segmento AB.
E) ponto médio do segmento AC.

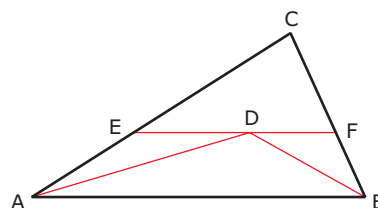
12. Se **P** é o incentro de um triângulo ABC e $B\hat{P}C$ = 125º, **DETERMINE** $\hat{A}$.

13. O circuncentro de um triângulo isósceles é interno ao triângulo e duas mediatrizes formam um ângulo de 50º. **DETERMINE** os ângulos desse triângulo.

14. Na figura, ABCD é retângulo, **M** é o ponto médio de $\overline{CD}$ e o triângulo ABM é equilátero. Sendo AB = 15, **CALCULE** AP.

15. (VUNESP-SP) Considere o triângulo ABC da figura adiante. Se a bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$ forma com a bissetriz externa do ângulo $\hat{C}$ um ângulo de 50°, **DETERMINE** a medida do ângulo interno $\hat{A}$.

16. (ITA-SP) Seja ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$. Sobre o lado $\overline{AC}$ desse triângulo, considere um ponto **D** tal que os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ e $\overline{BC}$ são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a

A) 23°
B) 32°
C) 36°
D) 40°
E) 45°

17. (Unificado-RJ) Na figura a seguir, os pontos **A**, **B** e **C** representam as posições de três casas construídas numa área plana de um condomínio. Um posto policial estará localizado num ponto **P** situado à mesma distância das três casas. Em Geometria, o ponto **P** é conhecido pelo o nome de

A) baricentro.
B) ortocentro.
C) circuncentro.
D) incentro.
E) ex-incentro.

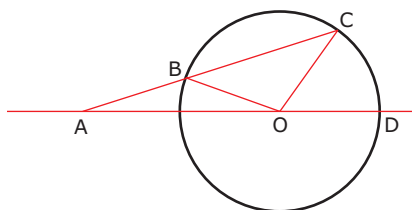
18. (UFPE–2009) Na ilustração a seguir, AD e BD estão nas bissetrizes respectivas dos ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ do triângulo ABC, e EF, que contém **D**, é paralela a AB. Se AC = 12 e BC = 8, qual o perímetro do triângulo CEF?

A) 16
B) 18
C) 20
D) 22
E) 24

19. Se **H** é o ortocentro de um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$ e $B\hat{H}C = 50°$, **DETERMINE** os ângulos do triângulo.

20. (FUVEST-SP–2009) Na figura, **B**, **C** e **D** são pontos distintos da circunferência de centro **O**, e o ponto **A** é exterior a ela. Além disso,

I. **A**, **B**, **C** e **A**, **O**, **D** são colineares;

II. AB = OB;

III. $C\hat{O}D$ mede α radianos.

Nessas condições, a medida de $A\hat{B}O$, em radianos, é igual a

A) $\pi - \frac{\alpha}{4}$

B) $\pi - \frac{\alpha}{2}$

C) $\pi - \frac{2\alpha}{3}$

D) $\pi - \frac{3\alpha}{4}$

E) $\pi - \frac{3\alpha}{2}$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2005) Quatro estações distribuidoras de energia **A**, **B**, **C** e **D** estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações **A** e **B** e da estrada (reta) que liga as estações **C** e **D**. A nova estação deve ser localizada

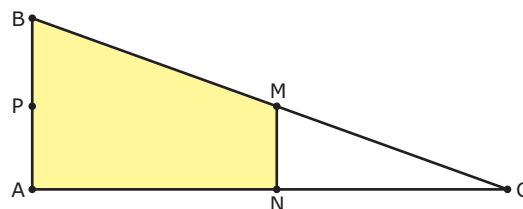
A) no centro do quadrado.

B) na perpendicular à estrada que liga **C** e **D** passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.

C) na perpendicular à estrada que liga **C** e **D** passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

D) no vértice de um triângulo equilátero de base AB, oposto a essa base.

E) no ponto médio da estrada que liga as estações **A** e **B**.

02. (Enem–2010) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.

A região demarcada pelas estacas **A**, **B**, **M** e **N** deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

A) à mesma área do triângulo AMC.

B) à mesma área do triângulo BNC.

C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.

D) ao dobro da área do triângulo MNC.

E) ao triplo da área do triângulo MNC.

GABARITO

Fixação

01. B
02. D
03. B
04. A
05. 58º

Propostos

01. D
02. C
03. D
04. B
05. B
06. C
07. C
08. D
09. A
10. B
11. A
12. 70º
13. 50°, 50° e 80° ou 50°, 65° e 65°
14. 10
15. 100°
16. C
17. C
18. C
19. 25°, 25° e 130°
20. C

Seção Enem

01. C
02. E

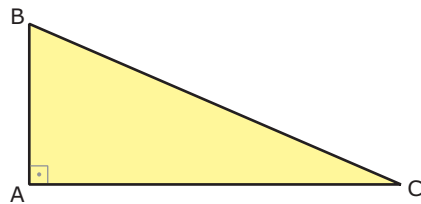
MATEMÁTICA

MÓDULO 01 FRENTE E

Trigonometria no triângulo retângulo

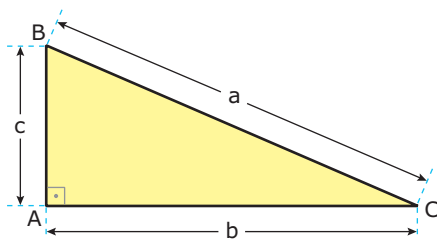
TRIÂNGULO RETÂNGULO

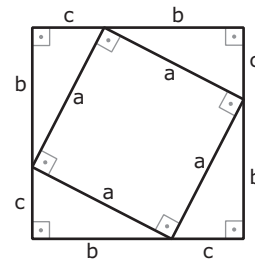
Triângulo retângulo é todo triângulo que tem um ângulo reto.

Na figura, $B\hat{A}C$ é reto. Costumamos dizer que o triângulo ABC é retângulo em **A**.

Em todo triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto são denominados **catetos**, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa,** e os ângulos agudos são denominados **complementares**.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Na figura, **b** e **c** são as medidas dos catetos; e **a**, a medida da hipotenusa. Daí, temos:

$$c^2 + b^2 = a^2$$

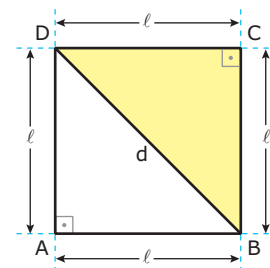
A demonstração formal do Teorema de Pitágoras pode ser feita a partir das relações métricas no triângulo retângulo. Oferecemos, aqui, apenas uma ideia de como se obter tal resultado, utilizando um quadrado (de lado b + c), subdividido em quatro triângulos retângulos (de lados **a**, **b** e **c**), e um quadrado menor (de lado **a**).

Somando as áreas dos quatro triângulos retângulos e do quadrado menor, obtemos a área do quadrado maior. Logo:

$$4.\frac{bc}{2} + a^2 = (b + c)^2 \Rightarrow 2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \Rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Aplicações

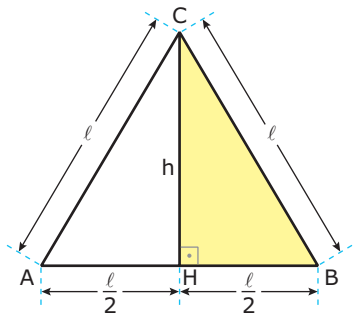
Vamos deduzir, num quadrado, a relação entre as medidas **d** de uma diagonal e **ℓ** de um lado e, num triângulo equilátero, a relação entre as medidas **h** de uma altura e **ℓ** de um lado.

Diagonal do quadrado

No triângulo BCD, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow$$

$$d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow$$

$$d = \ell\sqrt{2}$$

Altura do triângulo equilátero

No triângulo HBC, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow$$

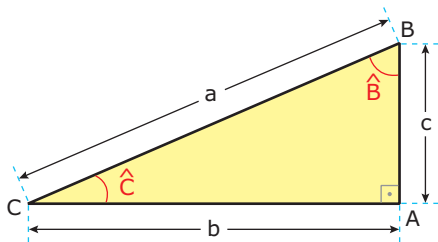
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

i) Seno: Em todo triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

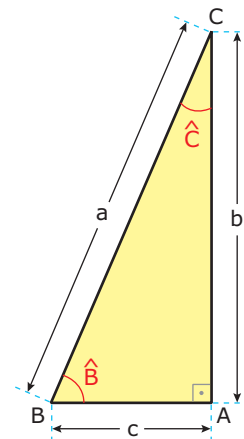
ii) Cosseno: Em todo triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

iii) Tangente: Em todo triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Num triângulo ABC, retângulo em **A**, vamos indicar por $\hat{B}$ e $\hat{C}$ as medidas dos ângulos internos, respectivamente, de vértices **B** e **C**.

	$\hat{B}$	$\hat{C}$
seno (sen)	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
cosseno (cos)	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{a}$
tangente (tg)	$\frac{b}{c}$	$\frac{c}{b}$

Utilizando o quadrado e o triângulo equilátero, é possível construir uma tabela com os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos 30°, 45° e 60°.

α	30°	45°	60°
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

RELAÇÕES ENTRE SENO, COSSENO E TANGENTE

Na figura:

$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}$, $\cos \hat{C} = \frac{b}{a}$, $\text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b}$

Dividindo sen $\hat{B}$ por cos $\hat{B}$, obtemos:

$$\frac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} \text{ tg } \hat{B}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Portanto, a tangente de um ângulo é o quociente entre o seno e o cosseno desse ângulo.

Dividindo os membros de $b^2 + c^2 = a^2$ por a^2, temos:

$$\frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Substituindo $\frac{b}{a} = \text{sen}\,\hat{B}$, e $\frac{c}{a} = \cos\hat{B}$, obtemos:

$$\text{sen}^2\,\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1$$

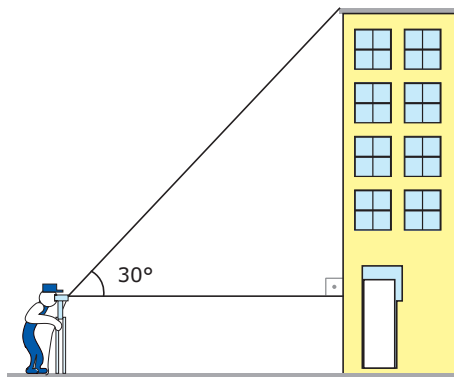
Portanto, a soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo é igual a 1.

Observamos ainda que sen $\hat{B}$ = cos $\hat{C}$ e sen $\hat{C}$ = cos $\hat{B}$.

Portanto, o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do complemento desse ângulo, e vice-versa.

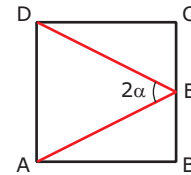
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\cos\alpha = \text{sen}\,(90° - \alpha)$
$\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90° - \alpha)$

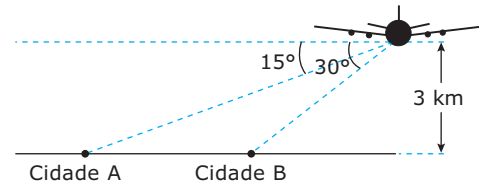
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFJF-MG) Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isso, ele colocou um teodolito (instrumento ótico para medir ângulos) a 200 metros do edifício e mediu um ângulo de 30°, como indicado na figura a seguir. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,5 metro do solo, pode-se concluir que, entre os valores a seguir, o que **MELHOR** aproxima a altura do edifício, em metros, é

A) 112
B) 115
C) 117
D) 20
E) 124

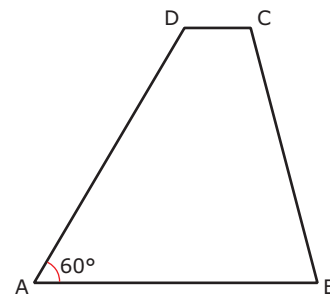
Use os valores:

sen 30° = 0,5 cos 30° = 0,866 tg 30° = 0,577

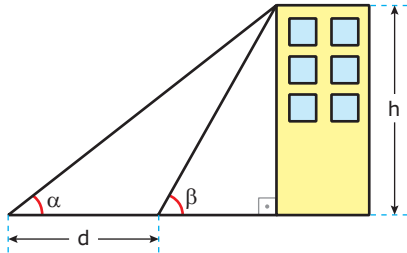
02. (UFMG) Nesta figura, **E** é o ponto médio do lado $\overline{BC}$ do quadrado ABCD. A tangente do ângulo **α** é

A) $\frac{1}{2}$
B) 1
C) 2
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

03. (UFV-MG–2006) Um passageiro em um avião avista duas cidades **A** e **B** sob ângulos de 15° e 30°, respectivamente, conforme a figura a seguir.

Se o avião está a uma altitude de 3 km, a distância entre as cidades **A** e **B** é

A) 7 km.
B) 5,5 km.
C) 6 km.
D) 6,5 km.
E) 5 km.

04. (UFMG) Observe a figura.

Na figura anterior, o trapézio ABCD tem altura $2\sqrt{3}$ e bases AB = 4 e DC = 1. A medida do lado $\overline{BC}$ é

A) $\sqrt{14}$
B) $\sqrt{13}$
C) 4
D) $\sqrt{15}$

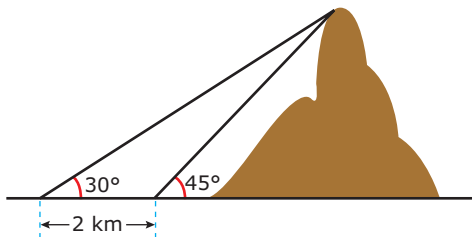
05. (UFOP-MG) Um observador vê um prédio segundo um ângulo $\boldsymbol{\alpha}$. Após caminhar uma distância **d** em direção ao prédio, ele passa a vê-lo segundo um ângulo $\boldsymbol{\beta}$. Podemos afirmar que a altura **h** do prédio é

A) $\dfrac{d \cdot tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}{tg\ \beta - tg\ \alpha}$

B) $\dfrac{d \cdot tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}{tg\ \alpha - tg\ \beta}$

C) $\dfrac{d \cdot tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}{tg\ \beta + tg\ \alpha}$

D) d

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

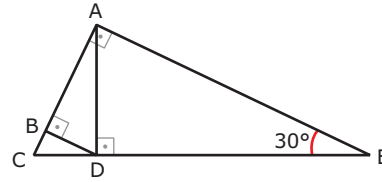
01. (UFJF-MG) Ao aproximar-se de uma ilha, o capitão de um navio avistou uma montanha e decidiu medir a sua altura. Ele mediu um ângulo de 30° na direção do seu cume, como indicado na figura. Depois de navegar mais 2 km em direção à montanha, repetiu o procedimento, medindo um novo ângulo de 45°. Então, usando $\sqrt{3}$ = 1,73, o valor que mais se aproxima da altura dessa montanha, em quilômetros, é

A) 2,1

B) 2,2

C) 2,5

D) 2,7

E) 3,0

02. (UFMG) Observe a figura.

Se a medida de $\overline{EC}$ é 80, o comprimento de $\overline{BC}$ é

A) 20
B) 10
C) 8
D) 5

03. (PUC Minas) A diagonal de um retângulo mede 10 cm, e os lados formam uma proporção com os números 3 e 4. O perímetro do retângulo, em cm, é de

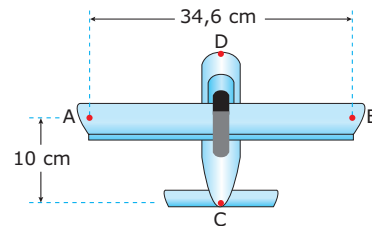
A) 14

B) 16

C) 28

D) 34

E) 40

04. (CEFET-MG–2009) O projeto de um avião de brinquedo, representado na figura a seguir, necessita de alguns ajustes em relação à proporção entre os eixos AB e CD. Para isso, deve-se calcular o ângulo $B\hat{A}C$ do triângulo **A**, **B** e **C**.

Considerando que o avião é simétrico em relação ao eixo CD e que $\sqrt{3}$ = 1,73, o valor de $B\hat{A}C$ é

A) 30º
B) 45º
C) 60º
D) 75º
E) 90º

05. (UNESP-SP–2008) Dado o triângulo retângulo ABC, cujos catetos são: AB = sen x e BC = cos x, os ângulos em **A** e **C** são

A) A = x e C = $\dfrac{\pi}{2}$

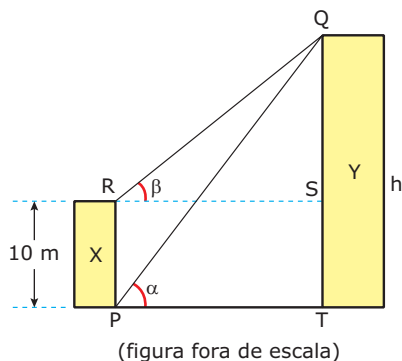
B) A = $\dfrac{\pi}{2}$ e C = x

C) A = x e C = $\dfrac{\pi}{2} - x$

D) A = $\dfrac{\pi}{2} - x$ e C = x

E) A = x e C = $\dfrac{\pi}{4}$

06. (UNESP-SP–2008) Dois edifícios, **X** e **Y**, estão um em frente ao outro, num terreno plano. Um observador, no pé do edifício **X** (ponto **P**), mede um ângulo **α** em relação ao topo do edifício **Y** (ponto **Q**). Depois disso, no topo do edifício **X**, num ponto **R**, de forma que RPTS formem um retângulo e QT seja perpendicular a PT, esse observador mede um ângulo **β** em relação ao ponto **Q** no edifício **Y**.

(figura fora de escala)

Sabendo que a altura do edifício **X** é 10 m e que 3 tg α = 4 tg β, a altura **h** do edifício **Y**, em metros, é

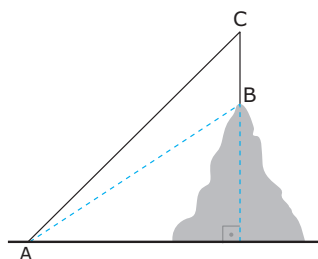
A) $\frac{40}{3}$

B) $\frac{50}{4}$

C) 30

D) 40

E) 50

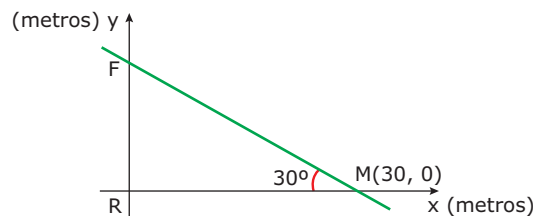
07. (PUC RS) De um ponto **A**, no solo, visam-se a base **B** e o topo **C** de um bastão colocado verticalmente no alto de uma colina, sob ângulos de 30° e 45°, respectivamente. Se o bastão mede 4 m de comprimento, a altura da colina, em metros, é igual a

A) $\sqrt{3}$

B) 2

C) $2\sqrt{3}$

D) $2(\sqrt{3} + 1)$

E) $2(\sqrt{3} + 3)$

08. (PUC-SP–2008) Para representar as localizações de pontos estratégicos de um acampamento em construção, foi usado um sistema de eixos cartesianos ortogonais, conforme mostra a figura a seguir, em que os pontos **F** e **M** representam os locais onde serão construídos os respectivos dormitórios feminino e masculino e **R**, o refeitório.

Se o escritório da coordenação do acampamento deverá ser equidistante dos dormitórios feminino e masculino e, no sistema, sua representação é um ponto pertencente ao eixo das abscissas, quantos metros ele distará do refeitório?

A) $10\sqrt{3}$
B) 10
C) $9\sqrt{3}$
D) 9
E) $8\sqrt{3}$

09. (UFJF-MG) O valor de $y = sen^2\ 10° + sen^2\ 20° + sen^2\ 30° + sen^2\ 40° + sen^2\ 50° + sen^2\ 60° + sen^2\ 70° + sen^2\ 80° + sen^2\ 90°$ é

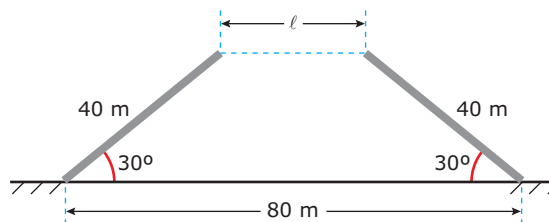
A) –1 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

10. (VUNESP-SP) A partir de um ponto, observa-se o topo de um prédio sob um ângulo de 30°. Caminhando 23 m em direção ao prédio, atingimos outro ponto de onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60°. Desprezando a altura do observador, a altura do prédio em metros é

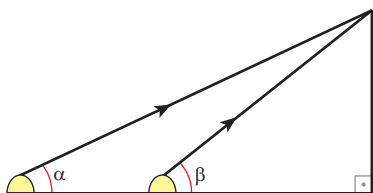
A) entre 10 e 12.
B) entre 12 e 15.
C) entre 15 e 18.
D) entre 18 e 19.
E) maior que 19.

11. (UFOP-MG–2009) Uma ponte elevadiça está construída sobre um rio cujo leito tem largura igual a 80 m, conforme ilustra a figura. A largura ℓ do vão entre as rampas dessa ponte, quando o ângulo de elevação das rampas é de 30º, é

A) $50 - \sqrt{3}$
B) $4(20 - 10\sqrt{3})$
C) $4(10 - 20\sqrt{3})$
D) $20(4 - \sqrt{3})$

MATEMÁTICA

12. (PUC-SP) Um dos ângulos de um triângulo retângulo é α. Se tg α = 2,4, os lados desse triângulo são proporcionais a

A) 30, 40, 50
B) 80, 150, 170
C) 120, 350, 370
D) 50, 120, 130
E) 61, 60, 11

13. (FUVEST-SP–2008) Para se calcular a altura de uma torre, utilizou-se o seguinte procedimento ilustrado na figura: um aparelho (de altura desprezível) foi colocado no solo, a uma certa distância da torre, e emitiu um raio em direção ao ponto mais alto da torre. O ângulo determinado entre o raio e o solo foi de $\alpha = \frac{\pi}{3}$ radianos. A seguir, o aparelho foi deslocado 4 metros em direção à torre e o ângulo então obtido foi de β radianos, com tg $\beta = 3\sqrt{3}$.

É **CORRETO** afirmar que a altura da torre, em metros, é

A) $4\sqrt{3}$
B) $5\sqrt{3}$
C) $6\sqrt{3}$
D) $7\sqrt{3}$
E) $8\sqrt{3}$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2006)

Na figura anterior, que representa o projeto de uma escada de 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

A) 1,8 m.
B) 1,9 m.
C) 2,0 m.
D) 2,1 m.
E) 2,2 m.

02. (Enem–2010) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

A) 1,8 km
B) 1,9 km
C) 3,1 km
D) 3,7 km
E) 5,5 km

GABARITO

Fixação

01. C
02. A
03. C
04. B
05. A

Propostos

01. D
02. B
03. C
04. A
05. D
06. D
07. D
08. B
09. E
10. E
11. B
12. D
13. C

Seção Enem

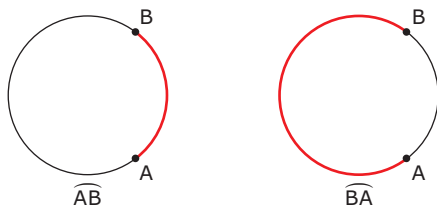
01. D
02. C

MATEMÁTICA

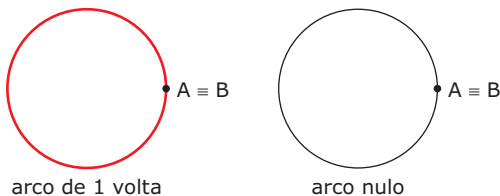
Arcos e ciclo trigonométrico

MÓDULO 02 FRENTE E

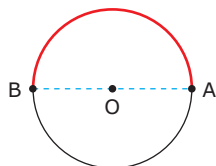
ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

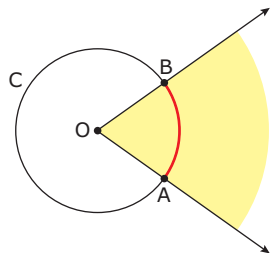
Dois pontos, **A** e **B**, de uma circunferência dividem-na em duas partes denominadas **arcos**; **A** e **B** são as extremidades de cada um desses arcos, que indicaremos por $\overset{\frown}{AB}$ ou $\overset{\frown}{BA}$.

Se **A** coincide com **B**, temos um arco de uma volta e um arco nulo.

arco de 1 volta

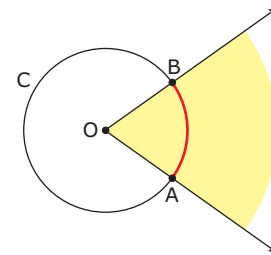
arco nulo

Se **A** e **B** são as extremidades de um mesmo diâmetro, temos um arco de meia-volta.

O: centro do círculo

$\overset{\frown}{AB}$: arco de meia-volta

ÂNGULO CENTRAL

Todo ângulo coplanar com uma circunferência **C**, cujo vértice é o centro de **C**, é denominado ângulo central relativo a **C**.

$\overset{\frown}{AB}$: arco correspondente ao ângulo central

O arco de circunferência contido num ângulo central é chamado de arco correspondente a esse ângulo.

Como a todo ângulo central de **C** corresponde um único arco de **C** contido nesse ângulo, e a todo arco de **C** corresponde um único ângulo central de **C**, a medida de um ângulo central, relativo a uma circunferência, e a medida do arco correspondente, numa mesma unidade, são iguais.

$m(A\hat{O}B) = m(\overset{\frown}{AB})$

MEDIDAS DE ÂNGULOS E ARCOS

Medida em graus

Dividindo-se uma circunferência em 360 partes congruentes entre si, cada um desses arcos é um arco de um grau (1°).

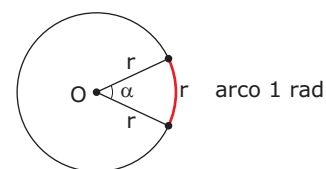
Dividindo-se um arco de 1° em 60 partes congruentes entre si, cada um desses arcos mede um minuto (1′).

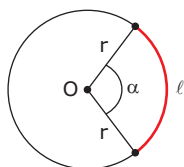
Dividindo-se um arco de 1′ em 60 partes congruentes entre si, cada um desses arcos mede um segundo (1″).

Portanto, 1° = 60′ e 1′ = 60″.

Para um arco de circunferência com medida **a** graus, **b** minutos e **c** segundos, escrevemos a°b′c″.

Radiano

Arco de 1 radiano (rad) é o arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém.

Um modo de definirmos o ângulo de 1 radiano é caracterizando-o como o ângulo correspondente a um arco de comprimento igual ao do seu raio.

Indicando por **α** a medida, em radianos, de um arco de comprimento **ℓ** contido numa circunferência de raio **r**, temos:

$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$

É importante observar que a medida de um ângulo, em radianos, só é igual ao comprimento de seu arco se r = 1.

As medidas de arcos de circunferências em graus e em radianos são diretamente proporcionais:

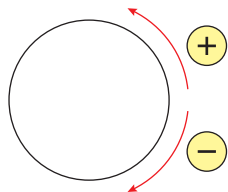
$$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$$

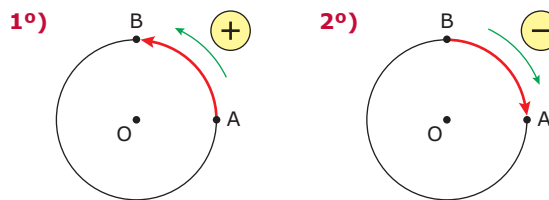
Esse fato nos possibilita obter uma forma de conversão de unidades através de uma regra de três simples:

medida em graus		medida em radianos
a	________________	α
180	________________	π

$$\frac{a}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Arco orientado

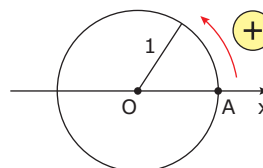
Em Trigonometria, adotamos o sentido anti-horário de percurso como o positivo e o sentido horário de percurso como o negativo.

Todo arco de circunferência não nulo no qual adotamos um sentido de percurso é chamado de arco orientado.

Exemplos

1º) **O**: centro do círculo

Arco orientado $\overset{\frown}{AB}$ tem medida $\frac{\pi}{2}$ rad ou 90°

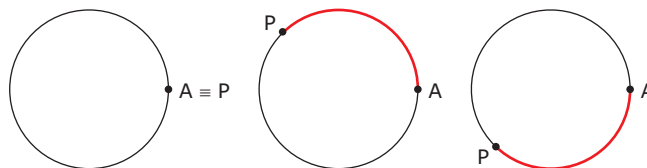
2º) **O**: centro do círculo

Arco orientado $\overset{\frown}{BA}$ tem medida $-\frac{\pi}{2}$ rad ou −90°

Ciclo trigonométrico

Toda circunferência orientada, de centro **O** e raio unitário, na qual escolhemos um ponto origem dos arcos, é denominada circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico. Adotaremos como origem dos arcos o ponto **A** de interseção do ciclo com o semieixo positivo das abscissas Ox.

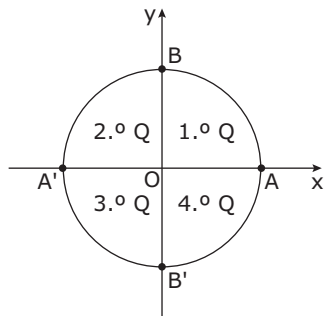
No ciclo trigonométrico, a medida absoluta **α**, em radianos, de um arco e o comprimento **ℓ** desse arco são iguais, pois $\alpha = \frac{\ell}{r}$ e r = 1.

Logo, podemos associar cada número real a um único ponto **P** do ciclo trigonométrico com o seguinte procedimento:

Se α = 0, tomamos P ≡ A.
Se α > 0, percorremos o ciclo no sentido anti-horário.
Se α < 0, percorremos o ciclo no sentido horário.

$m(\overset{\frown}{AP}) = 0$ $m(\overset{\frown}{AP}) = \alpha > 0$ $m(\overset{\frown}{AP}) = \alpha < 0$

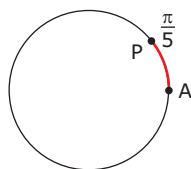
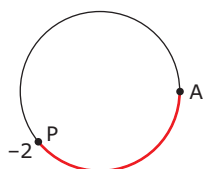
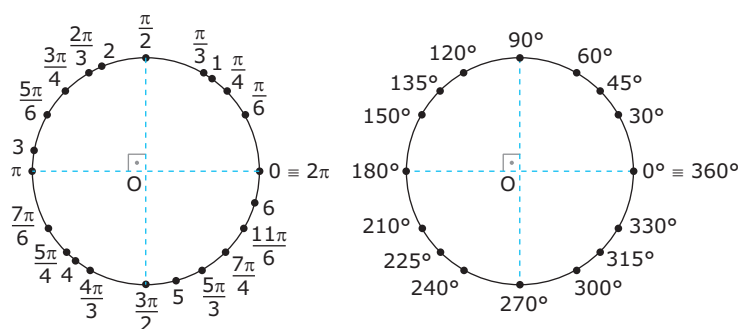
O ponto **P** é a imagem de **α** no ciclo trigonométrico.

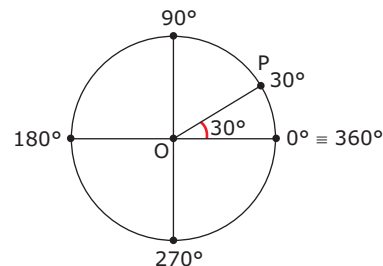
Convenções

i) O sistema de coordenadas xOy divide a circunferência trigonométrica em quatro quadrantes:

ii) Será omitido o símbolo rad nos arcos trigonométricos em radianos.

iii) Como todo arco trigonométrico tem como extremidade um mesmo ponto, denotaremos o arco apenas pelo outro ponto.

Exemplos

1º) Partindo de **A** e percorrendo, no sentido anti-horário, um arco de comprimento $\frac{\pi}{5}$, obtemos o arco de $\frac{\pi}{5}$.

2º) Partindo de **A** e percorrendo, no sentido horário, um arco de comprimento 2, obtemos o arco –2.

Obtemos, assim, o ciclo trigonométrico em radianos e em graus.

ARCOS CÔNGRUOS

Consideremos **P** imagem de um arco de 30° no ciclo trigonométrico.

No sentido anti-horário, dando 1, 2, 3, ... voltas completas, obtemos os arcos de 30° + 1.360° = 390°, 30° + 2.360° = 750°; 30° + 3.360° = 1 110°, ..., todos associados a **P**.

Também no sentido horário, dando 1, 2, 3, ... voltas completas, obtemos os arcos de 30° – 1.360° = –330°, 30° – 2.360° = –690°; 30° – 3.360° = –1 050°, ..., todos associados a **P**.

Logo, podemos associar ao ponto **P** infinitos arcos de medida positiva, bem como infinitos arcos de medida negativa. Tais arcos podem ser representados por:

$30° + k.360°$; $k \in \mathbb{Z}$ ou, em radianos, $\frac{\pi}{6} + k.2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Como os arcos têm a mesma origem, **A**, e a mesma imagem, **P**, dizemos que eles são côngruos entre si ou, simplesmente, côngruos.

As medidas dos arcos côngruos a um arco de medida α são dadas por:

$\alpha + k.2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou, em graus, $\alpha + k.360°$; $k \in \mathbb{Z}$

Se $0 \leq \alpha < 2\pi$ (ou $0° \leq \alpha < 360°$), o arco de medida α é a determinação principal ou a 1ª determinação não negativa desses arcos côngruos entre si.

Notemos que a diferença entre as medidas de dois arcos côngruos entre si é igual ao produto de um número inteiro por 2π (ou é múltiplo de 360°), isto é, sempre equivale a um número inteiro de voltas completas.

Exemplos

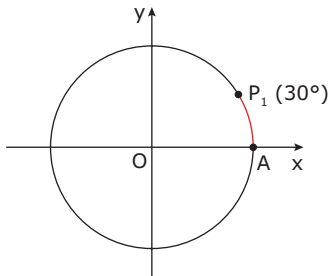
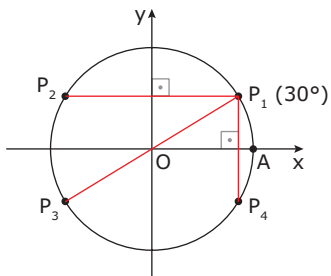
1º) Os arcos de medidas $\frac{27\pi}{5}$ e $-\frac{13\pi}{5}$ são côngruos entre si, pois: $\frac{27\pi}{5} - \left(-\frac{13\pi}{5}\right) = \frac{27\pi}{5} + \frac{13\pi}{5} = 8\pi = 4.2\pi$

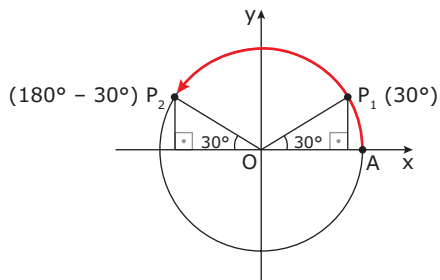
2º) Os arcos de medidas $\frac{27\pi}{7}$ e $\frac{6\pi}{7}$ não são côngruos entre si, pois $\frac{27\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} = 3\pi$ (não é um produto de um inteiro por 2π).

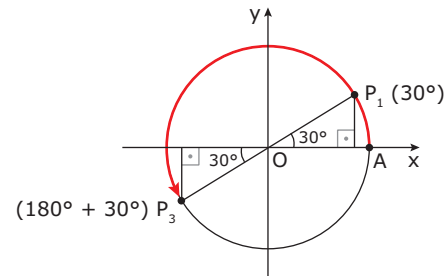
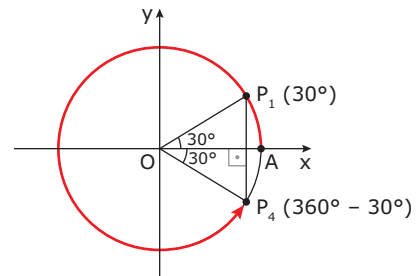
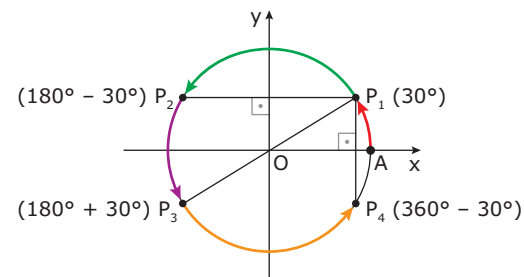
3º) Os arcos de medidas 1 110° e 390° são côngruos entre si, pois: 1 110° – 390° = 720° = 2.360°

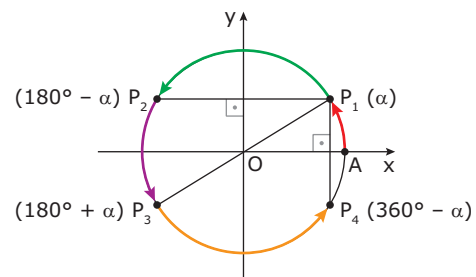
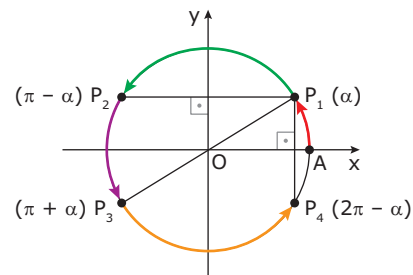
4º) Os arcos de medidas –30° e 320° não são côngruos entre si, pois –30° – 320° = –350° (não é múltiplo de 360°).

SIMETRIAS

Consideremos o ponto P_1 associado à medida 30°, no ciclo trigonométrico.

Pelo ponto P_1, traçando três retas, uma delas perpendicular ao eixo das ordenadas, outra que passa pela origem do sistema, e a terceira perpendicular ao eixo das abscissas, obtemos os pontos P_2, P_3 e P_4, respectivamente.

Os pontos P_2, P_3 e P_4 são chamados de simétricos (ou correspondentes) do ponto P_1 nos diversos quadrantes. E suas medidas **x** ($0° \leq x \leq 360°$) são:

P_2) 180° – 30° = 150°

Analogamente, temos:

P_3) 180° + 30° = 210°

P_4) 360° – 30° = 330°

Temos, então:

Generalizando, temos:

i) Sendo **α** uma medida em graus:

ii) Sendo **α** uma medida em radianos:

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (Unimontes-MG–2007) Quando os ponteiros de um relógio marcam 1h50min, qual a medida do ângulo central formado por eles?

A) 120° B) 115° C) 110° D) 95°

02. (FUVEST-SP) O perímetro de um setor circular de raio **R** e ângulo central medindo **α** radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado **R**. Então, **α** é igual a

A) $\frac{\pi}{3}$ B) 2 C) 1 D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$

03. (UFSCar-SP) Se o ponteiro dos minutos de um relógio mede 12 centímetros, o número que **MELHOR** aproxima a distância em centímetros percorrida por sua extremidade em 20 minutos é (Considere π = 3,14)

A) 37,7 cm.
B) 25,1 cm.
C) 20 cm.
D) 12 cm.
E) 3,14 cm.

04. (FUVEST-SP) Um arco de circunferência mede 300° e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio, em metros?

A) 157 B) 284 C) 382 D) 628 E) 764

05. (PUC Minas) Um ângulo central de uma circunferência de raio 5 centímetros intercepta um arco de circunferência de 24 centímetros de comprimento. A medida desse ângulo, em graus, é

A) $\frac{757}{\pi}$
B) $\frac{786}{\pi}$
C) $\frac{805}{\pi}$
D) $\frac{864}{\pi}$
E) $\frac{983}{\pi}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

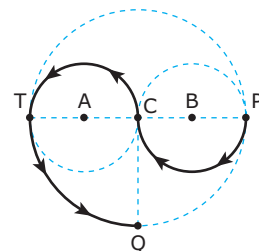
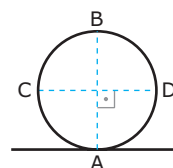
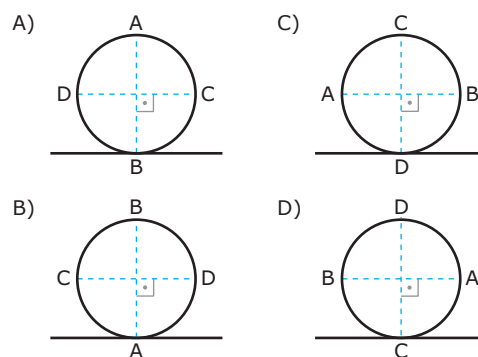
01. (FUVEST-SP) Considere um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 110° numa circunferência de raio 10 cm. Considere, a seguir, um arco $\overset{\frown}{A'B'}$ de 60° numa circunferência de raio 5 cm. Dividindo-se o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ pelo do arco $\overset{\frown}{A'B'}$ (ambos medidos em cm), obtém-se

A) $\frac{11}{6}$ B) 2 C) $\frac{11}{3}$ D) $\frac{22}{3}$ E) 11

02. (UFRGS-RS) As rodas traseiras de um veículo têm 4,25 metros de circunferência cada uma. Enquanto as rodas dianteiras dão 15 voltas, as traseiras dão somente 12 voltas. A circunferência de cada roda dianteira mede

A) 2,125 metros.
B) 2,25 metros.
C) 3,4 metros.
D) 3,75 metros.

03. (PUC-SP) Na figura, têm-se 3 circunferências de centros **A**, **B** e **C**, tangentes duas a duas. As retas $\overleftrightarrow{QC}$ e $\overleftrightarrow{PT}$ são perpendiculares. Sendo 4 m o raio da circunferência maior, quantos metros devemos percorrer para ir de **P** a **Q**, seguindo as flechas?

A) 2π
B) 3π
C) 4π
D) 6π
E) 12π

04. (UFSJ-MG) Na figura a seguir, está representado um arco circular de espessura desprezível, em repouso, de 1 m de raio, sendo o diâmetro $\overline{AB}$ perpendicular ao diâmetro $\overline{CD}$ e **A** o ponto de contato do aro com a superfície lisa e reta.

Considerando π = 3,14, é **CORRETO** afirmar que, se o aro rolar, sem deslizar, ininterruptamente, para a direita, parando depois de 21,98 m, então a figura correspondente nesse momento é a que está na alternativa

A)
B)
C)
D)
05. (PUC Minas) Ao projetar prédios muito altos, os engenheiros devem ter em mente o movimento de oscilação, que é típico de estruturas de arranha-céus. Se o ponto mais alto de um edifício de 400 m descreve um arco de 0,5°, a medida do arco descrito por esse ponto, em metros, é

A) π
B) $\frac{3\pi}{4}$
C) $\frac{4\pi}{3}$
D) $\frac{10\pi}{9}$
E) $\frac{11\pi}{10}$

06. (UFRGS-RS) Os ponteiros de um relógio marcam duas horas e vinte minutos. O **MENOR** ângulo entre os ponteiros é

A) 45° B) 50° C) 55° D) 60° E) 65°

MATEMÁTICA

07. (PUC-SP) João e Maria costumavam namorar atravessando um caminho reto que passava pelo centro de um canteiro circular, cujo raio mede 5 m. Veja a figura 1.

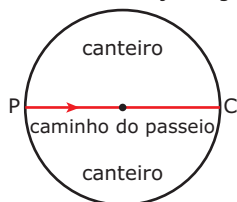



Figura 1

Certo dia, após uma desavença que tiveram no ponto de partida **P**, partiram emburrados, e, ao mesmo tempo, para o ponto de chegada **C**. Maria caminhou pelo diâmetro do canteiro e João andou ao longo do caminho que margeava o canteiro (sobre o círculo), cuidando para estar sempre à "mesma altura" de Maria, isto é, de modo que a reta $\overleftrightarrow{MJ}$, formada por Maria e João, ficasse sempre perpendicular ao diâmetro do canteiro. Veja a figura 2.

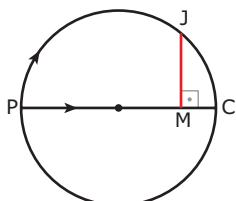



Figura 2

Quando a medida do segmento $\overline{PM}$, percorrido por Maria, for igual a $7,5 = 5 + \frac{5}{2}$ metros, o comprimento do arco de circunferência $\overset{\frown}{PJ}$, percorrido por João, será igual a

A) $\left(\frac{10\pi}{3}\right)$m.
B) 2π m.
C) $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$m.
D) $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$m.
E) $\left(\frac{\pi}{3}\right)$m.

08. (UFOP-MG) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km em torno de uma pista circular de raio 200 m. O número aproximado de voltas que ele deve dar é

A) 100 B) 200 C) 300 D) 400 E) 500

09. (UniBH-MG) Considerando $\pi = 3,14$, o número de voltas completas que uma roda de raio igual a 40 cm, incluindo o pneu, dará para que o automóvel se desloque 1 quilômetro será de

A) 290 B) 398 C) 2 000 D) 3 980

10. (UFC-CE) Um relógio marca que faltam 15 minutos para as duas horas. Então, o **MENOR** dos dois ângulos formados pelos ponteiros das horas e dos minutos mede

A) 142°30'
B) 150°
C) 157°30'
D) 135°
E) 127°30'

11. (UFPA) Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio em 50 minutos?

A) $\frac{16\pi}{9}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{4\pi}{3}$ D) $\frac{4\pi}{2}$ E) $\frac{3\pi}{3}$

12. (UFMG) A medida, em graus, de um ângulo que mede 4,5 rad é

A) $\frac{4,5}{\pi}$
B) $4,5\pi$
C) $\frac{810}{\pi}$
D) 810
E) 810π

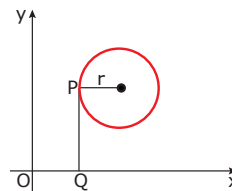
13. (PUC RS) Em uma circunferência de 5 cm de raio, marca-se um arco de 8 cm de comprimento. Em radianos, esse arco vale

A) 5π B) 8π C) 8 D) $\frac{8}{5}$ E) $\frac{8\pi}{5}$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2004) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade *skate* vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

A) uma volta completa.
B) uma volta e meia.
C) duas voltas completas.
D) duas voltas e meia.
E) cinco voltas completas.

02. (Enem–2009) Considere um ponto **P** em uma circunferência de raio **r** no plano cartesiano. Seja **Q** a projeção ortogonal de **P** sobre o eixo **x**, como mostra a figura, e suponha que o ponto **P** percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.

Então, o ponto **Q** percorrerá, no eixo **x**, uma distância dada por

A) $r\left(1 - \text{sen}\,\frac{d}{r}\right)$.
B) $r\left(1 - \cos\frac{d}{r}\right)$.
C) $r\left(1 - \text{tg}\,\frac{d}{r}\right)$.
D) $r\,\text{sen}\left(\frac{r}{d}\right)$.
E) $r\cos\left(\frac{r}{d}\right)$.

GABARITO

Fixação

01. B 02. B 03. B 04. C 05. D

Propostos

01. C
02. C
03. D
04. A
05. D
06. B
07. A
08. D
09. B
10. A
11. B
12. C
13. D

Seção Enem

01. D 02. B

MATEMÁTICA

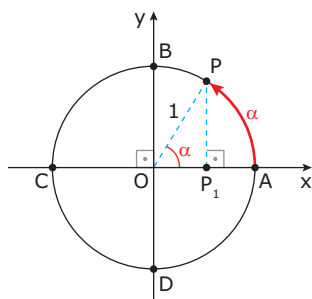
MÓDULO 03 FRENTE E

Funções seno e cosseno

FUNÇÃO PERIÓDICA

Uma função y = f(x) é periódica, de período **p**, se existe $p \in \mathbb{R}$, p > 0, tal que f(x + p) = f(x), para todo **x** pertencente ao domínio da função.

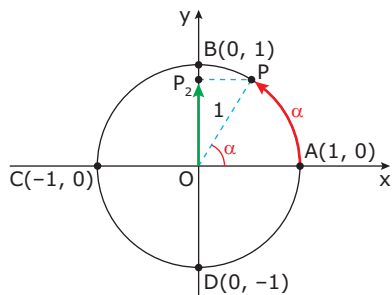
FUNÇÃO SENO

No ciclo trigonométrico a seguir, **α** é a medida do ângulo $A\hat{O}P$, e o triângulo OP_1P é retângulo.

Utilizando a definição de seno para ângulos agudos num triângulo retângulo, podemos escrever:

sen $\alpha = \frac{P_1P}{OP}$, em que OP = 1, e P_1P é a ordenada de **P**, ou seja:

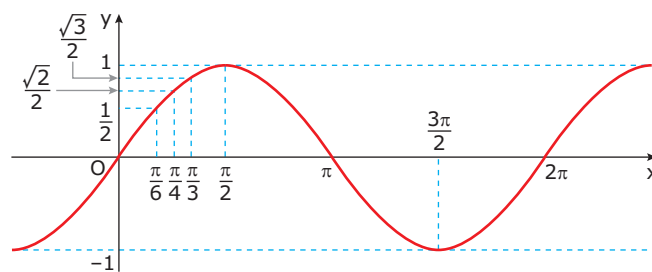
sen α = ordenada de **P**

A função seno é a função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que para todo número **α** associa a ordenada do ponto **P** (imagem de **α** no ciclo trigonométrico).

sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\alpha \to \text{sen } \alpha = OP_2$

Dizemos também que OP_2 é o seno de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$.

sen $A\hat{O}P$ = sen $\overset{\frown}{AP}$ = OP_2

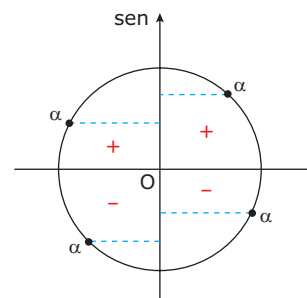
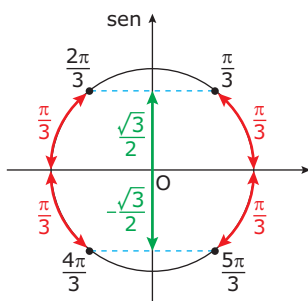
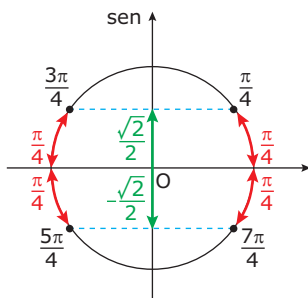
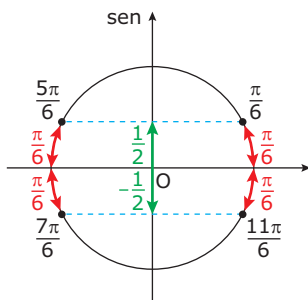
O eixo Oy passa a ser denominado, então, como eixo dos senos.

GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO (SENOIDE)

A imagem da função seno é o intervalo [–1, 1], isto é, $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, para todo **x** real.

A função seno é periódica, e seu período é 2π.

SINAL

Vamos analisar o sinal de sen α quando **P** (imagem de **α** no ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.

Eixo dos senos:

VALORES NOTÁVEIS

SENOS DE ARCOS CÔNGRUOS

Qualquer que seja o número real **α**, os arcos de medida **α** e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem **A** e a mesma extremidade **P**. Logo:

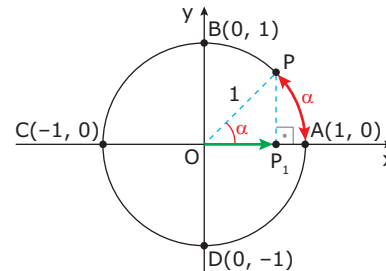
$$\text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\,\alpha,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exemplos

1º) sen 750° = sen 390° = sen 30° = $\frac{1}{2}$

2º) A determinação principal do arco de medida $\frac{29\pi}{3}$ rad mede $\frac{5\pi}{3}$ rad. Então, sen $\frac{29\pi}{3}$ = sen $\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

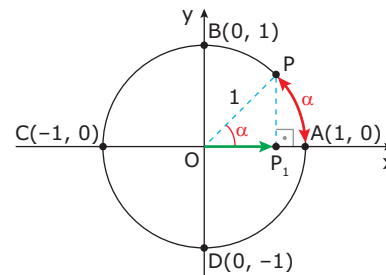
FUNÇÃO COSSENO

No ciclo trigonométrico a seguir, **α** é a medida do ângulo agudo $A\hat{O}P$, e o triângulo OP_1P é retângulo.

Utilizando a definição de cosseno para ângulos agudos num triângulo retângulo, podemos escrever:

$\cos\alpha = \frac{OP_1}{OP}$, em que OP = 1, e OP_1 é a abscissa de **P**, ou seja:

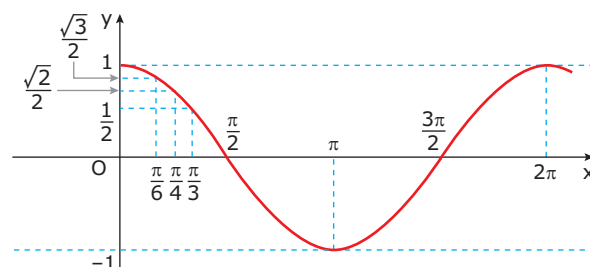
cos α = abscissa de **P**

A função cosseno é a função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que para todo número **α** associa a abscissa do ponto **P** (imagem de **α** no círculo trigonométrico).

$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \alpha \to \cos\alpha = OP_1$

Dizemos, também, que OP_1 é o cosseno de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$, e indicamos:

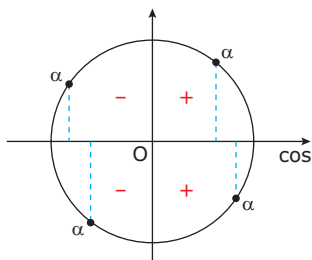
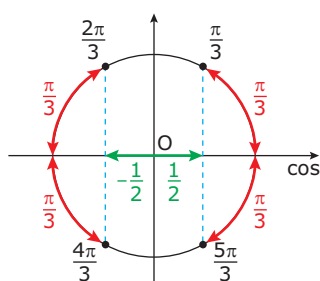
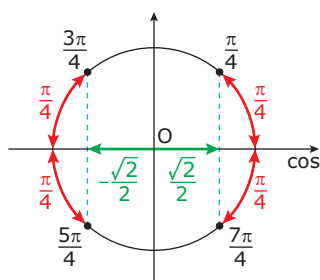
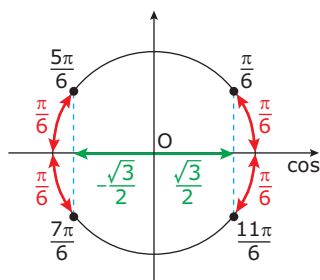
$$\cos A\hat{O}P = \cos \overset{\frown}{AP} = OP_1$$

O eixo Ox passa a ser denominado, então, como eixo dos cossenos.

GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO (COSSENOIDE)

A imagem da função cosseno é o intervalo [−1, 1], isto é, $-1 \le \cos x \le 1$, para todo **x** real.

A função cosseno é periódica, e seu período é 2π.

SINAL

Vamos analisar o sinal de cos α quando **P** (imagem de $\boldsymbol{\alpha}$ no ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.

VALORES NOTÁVEIS

COSSENOS DE ARCOS CÔNGRUOS

Qualquer que seja o número real $\boldsymbol{\alpha}$, os arcos de medidas $\boldsymbol{\alpha}$ e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem **A** e a mesma extremidade **P**. Logo:

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exemplos

1º) $\cos 8\pi = \cos 6\pi = \cos 4\pi = \cos 2\pi = \cos 0 = 1$

2º) A determinação principal do arco de medida $\frac{20\pi}{3}$ rad mede $\frac{2\pi}{3}$ rad. Então, $\cos \frac{20\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

PERÍODO DE FUNÇÕES ENVOLVENDO SENO E COSSENO

Sabendo-se que as funções seno e cosseno são periódicas, e seu período é 2π, podemos calcular o período **p** das seguintes funções:

i) $f(x) = \text{sen}(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|m|},\ m \neq 0$

ii) $f(x) = \cos(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|m|},\ m \neq 0$

Demonstração:

i) Seja $f(x) = \text{sen}(mx + n)$, $m \neq 0$.

Como o período da função sen x é igual a 2π, obtemos um período de f(x) quando o arco $(mx + n)$ variar, por exemplo, de 0 a 2π.

Assim:

$$mx + n = 0 \Rightarrow x = -\frac{n}{m}$$

$$mx + n = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{m} - \frac{n}{m}$$

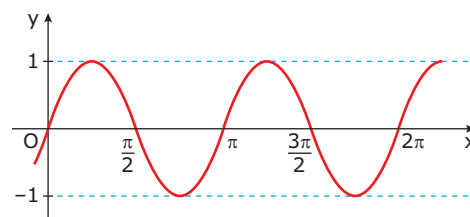
Como o período **p** é positivo, temos:

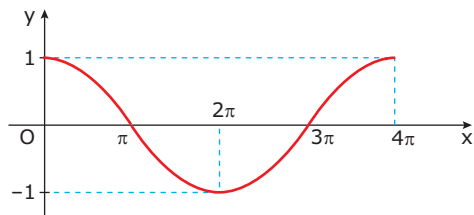
$$p = |\Delta x| = \left|\frac{2\pi}{m} - \frac{n}{m} - \left(-\frac{n}{m}\right)\right| = \frac{2\pi}{|m|}$$

ii) A demonstração é análoga.

Exemplos

1º) $f(x) = \text{sen}\ 2x$

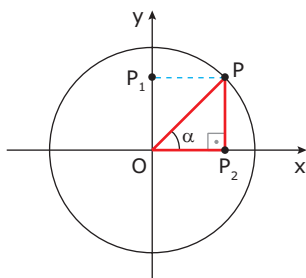
$$m = 2 \Rightarrow p = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow p = \pi$$

2º) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

$m = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} \Rightarrow p = 4\pi$

RELAÇÃO FUNDAMENTAL ENTRE SENO E COSSENO

Utilizando as razões trigonométricas num triângulo retângulo, já havíamos deduzido que:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Tal relação é conhecida como a Relação Fundamental da Trigonometria, e pode ser demonstrada facilmente no ciclo trigonométrico.

Tomemos um ângulo α tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (os demais casos são demonstrados de maneira análoga).

Assim, temos: $P_2P = OP_1 = \text{sen } \alpha$, $OP_2 = \cos \alpha$ e $OP = 1$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(P_2P)^2 + (OP_2)^2 = (OP)^2 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

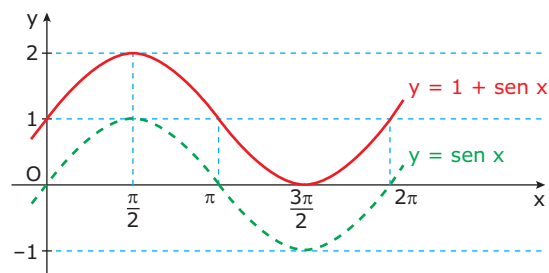
01. Dar o domínio, o conjunto imagem e esboçar o gráfico de $y = 1 + \text{sen } x$.

Resolução:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Conjunto imagem:

$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \text{sen } x \leq 2 \Rightarrow \text{Im} = [0, 2]$

Gráfico:

02. Determinar **m** de modo que se tenha $\cos x = \frac{m+3}{2}$.

Resolução:

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, tem-se:

$-1 \leq \frac{m+3}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m + 3 \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (VUNESP-SP) Uma máquina produz diariamente **x** dezenas de certo tipo de peças. Sabe-se que o custo de produção C(x) e o valor de venda V(x) são dados, aproximadamente, em milhares de reais, respectivamente, pelas funções:

$$C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \text{ e } V(x) = 3\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right),\ 0 \leq x \leq 6$$

O lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é

A) 500
B) 750
C) 1 000
D) 2 000
E) 3 000

02. (PUC Minas) Se $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ e α é um ângulo do terceiro quadrante, então o valor de $\text{sen } \alpha$ é igual a

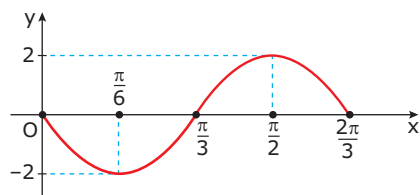
A) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
B) $-\frac{\sqrt{13}}{4}$
C) $\frac{\sqrt{11}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{13}}{4}$
E) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

03. (UFES) O período e a imagem da função $f(x) = 5 - 3\cos\left(\frac{x-2}{\pi}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, são, respectivamente,

A) 2π e $[-1, 1]$
B) 2π e $[2, 8]$
C) $2\pi^2$ e $[2, 8]$
D) 2π e $[-3, 3]$
E) $2\pi^2$ e $[-3, 3]$

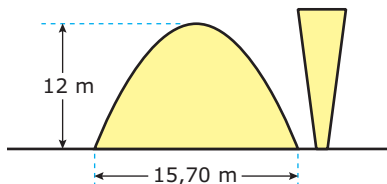
04. (UFU-MG) Se **f** é a função real dada por $f(x) = 2 - \cos(4x)$, então é **CORRETO** afirmar que

A) o gráfico de **f** intercepta o eixo dos **x**.
B) $f(x) \leq 3$ e $f(x) \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
C) $f(x) \leq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
D) $f(x) < 0$.
E) $f(x) \geq \frac{3}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

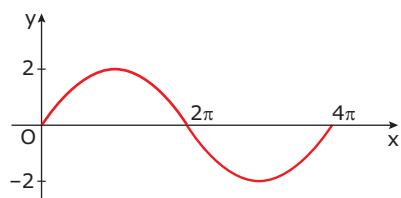
05. (VUNESP-SP) Observe o gráfico.

Sabendo-se que ele representa uma função trigonométrica, a função y(x) é

A) −2 cos 3x
B) −2 sen 3x
C) 2 cos 3x
D) 3 sen 2x
E) 3 cos 2x

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FJP-MG–2010) Observe a seguinte figura que lembra um dos mais bonitos cartões postais de Belo Horizonte.

Parece que o arquiteto Oscar Niemeyer se inspirou no arco de uma senoide para fazer a fachada da Igreja da Pampulha. Se assim foi, das funções a seguir, a que mais se aproxima da função que o inspirou é

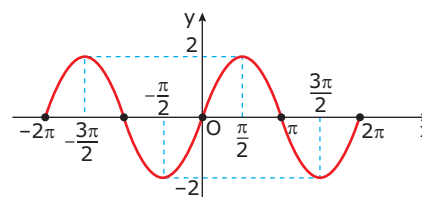
A) f(x) = 12 sen (5x)
B) $f(x) = 12 \text{ sen}\left(\frac{x}{5}\right)$
C) $f(x) = 12 \text{ sen}\left(\frac{15{,}70x}{\pi}\right)$
D) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{15{,}70x}{12}\right)$

02. (FUVEST-SP) A figura a seguir mostra parte do gráfico da função

A) sen x
B) $2 \text{ sen}\left(\frac{x}{2}\right)$
C) 2 sen x
D) 2 sen 2x
E) sen 2x

03. (Cesgranrio) Se sen (x) − cos (x) = $\frac{1}{2}$, o valor de sen (x) cos (x) é igual a

A) $-\frac{3}{16}$
B) $-\frac{3}{8}$
C) $\frac{3}{8}$
D) $\frac{3}{4}$
E) $\frac{3}{2}$

04. (UFES) Qual das equações representa a função trigonométrica cujo gráfico está na figura a seguir?

A) y = 2 sen x
B) $y = \text{sen}\ \frac{x}{2}$
C) y = sen 2x
D) y = 2 sen 2x
E) $y = 2 \text{ sen}\ \frac{x}{2}$

05. (Unimontes-MG–2008) Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(\theta) = \cos\left(\frac{\pi - \theta}{3}\right)$. Assim, podemos afirmar que

A) $f(2\pi) - f(0) = \sqrt{3}$
B) $f(2\pi) - f(0) = 0$
C) $f(2\pi) - f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $f(2\pi) - f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

06. (Mackenzie-SP) A função real definida por f(x) = k.cos (px), k > 0 e p > 0, tem período 7π e conjunto imagem [−7, 7]. Então, kp vale

A) 7
B) $\frac{7}{2}$
C) 2
D) $\frac{2}{7}$
E) 14

07. (UFPel-RS) O conjunto imagem da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = 2 sen (x) − 3, é o intervalo

A) [−1, 1]
B) [−5, 5]
C) [−5, 1]
D) [−1, 5]
E) [−5, −1]

08. (FUVEST-SP) O **MENOR** valor de $\frac{1}{3 - \cos x}$, com **x** real, é

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 3

09. (Unimontes-MG–2008) Dado $\text{sen } x = -\frac{3}{2\sqrt{3}}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, o valor de y = (1 + cos x)(1 − cos x) é

A) $-\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\pm\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{2}$

10. (Cesgranrio) Seja f: [0, 2π] → $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = -3 \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

O valor de **x** que torna f(x) máximo é

A) 0
B) $\frac{\pi}{3}$
C) $\frac{4\pi}{3}$
D) $\frac{5\pi}{3}$
E) $\frac{3\pi}{2}$

MATEMÁTICA

11. (UFES) Considere que V(t), o volume de ar nos pulmões de um ser humano adulto, em litros, varia de, no mínimo, 2 litros a, no máximo, 4 litros, sendo **t** a variável tempo, em segundos. Entre as funções a seguir, a que **MELHOR** descreve V(t) é

A) $2 + 2.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

B) $4 + 2.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

C) $5 + 3.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

D) $1 + 3.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

E) $3 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

12. (UEL-PR) Seja **x** a medida de um arco em radianos. O número real **a**, que satisfaz as sentenças sen x = $-\sqrt{3-a}$ e cos x = $\frac{a-2}{2}$, é tal que

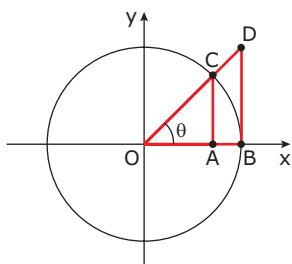
A) $a \geq 7$

B) $5 \leq a < 7$

C) $3 \leq a < 5$

D) $0 \leq a < 3$

E) $a < 0$

13. (UFJF-MG) A figura a seguir mostra, no plano cartesiano, uma circunferência centrada na origem, de raio igual a 1, passando pelos pontos **B** e **C**. Nessa figura, os pontos **O**, **C** e **D** são colineares, os segmentos de retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são paralelos ao eixo **y** e **θ** é o ângulo que o segmento de reta $\overline{OD}$ faz com o eixo **x**.

Com respeito a essa figura, é **CORRETO** afirmar que

A) OA = sen θ

B) OC = cos θ

C) $BD = \frac{AC}{OA}$

D) $\frac{AC}{BD} = \frac{OD}{OB}$

E) $OB^2 + BD^2 = 1$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2010) Um satélite de telecomunicações, **t** minutos após ter atingido sua órbita, está a **r** quilômetros de distância do centro da Terra. Quando **r** assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de **r** em função de **t** seja dado por:

$$r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15.\cos(0{,}06.t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de **r**, no apogeu e no perigeu, representada por **S**. O cientista deveria concluir que, periodicamente, **S** atinge o valor de

A) 12 765 km.

B) 12 000 km.

C) 11 730 km.

D) 10 965 km.

E) 5 865 km.

02. As vendas de uma certa empresa são muito oscilantes, devido à sazonalidade do produto que fabrica. O cálculo do número de produtos vendidos pode ser fornecido pela seguinte função, cujos valores são expressos em milhares de reais:

$V(t) = 250 - 50.\text{sen}\left(\frac{\pi.t}{2}\right)$, em que **t** representa cada mês do ano;

(t = 1: janeiro; t = 2: fevereiro, e assim por diante).

Com base nessas informações, as vendas da empresa são

A) maiores nos meses de janeiro, maio e setembro.

B) maiores nos meses de fevereiro, abril, junho, agosto, outubro e dezembro.

C) maiores nos meses de março, julho e novembro.

D) menores nos meses de fevereiro, abril, junho, agosto, outubro e dezembro.

E) nulas nos meses de fevereiro, abril, junho, agosto, outubro e dezembro.

GABARITO

Fixação

01. C 02. A 03. C 04. B 05. B

Propostos

01. B	04. A	07. E	10. D	13. C
02. B	05. B	08. B	11. E	
03. C	06. C	09. B	12. D	

Seção Enem

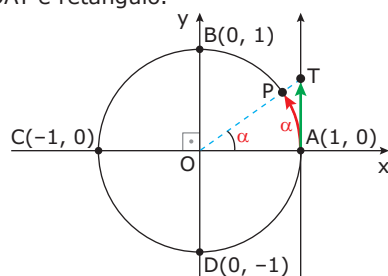
01. B 02. C

MATEMÁTICA

Funções tangente, cotangente, secante e cossecante

FUNÇÃO TANGENTE

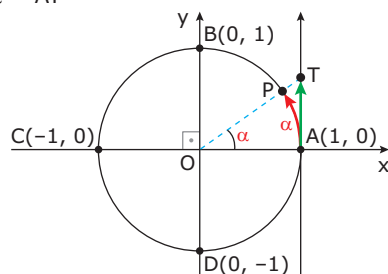
Pela origem **A** dos arcos, consideremos o eixo AT paralelo a Oy, passando por **A**.

Temos que **α** é a medida do ângulo agudo $A\hat{O}P$, e o triângulo OAT é retângulo.

Portanto, utilizando a definição de tangente para ângulos agudos num triângulo retângulo, podemos escrever $\text{tg}\ \alpha = \frac{AT}{OA}$, em que OA = 1, e AT é a ordenada de **T**, ou seja:

$$\text{tg}\ \alpha = \text{ordenada de } \mathbf{T}$$

A função tangente é a função de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ em $\mathbb{R}$, que para todo número **α** associa a ordenada do ponto **T**, interseção de $\overleftrightarrow{AT}$ com $\overleftrightarrow{OP}$ (em que **P** é a imagem de **α** no ciclo trigonométrico).

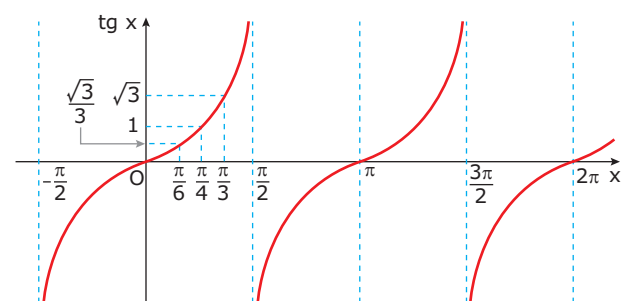
$$\text{tg}: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

$$\alpha \to \text{tg}\ \alpha = AT$$

Dizemos, também, que AT é a tangente de $A\hat{O}P$ ou de $\widehat{AP}$.

$$\text{tg}\ A\hat{O}P = \text{tg}\ \widehat{AP} = AT$$

O eixo AT passa a ser denominado, então, eixo das tangentes.

Gráfico

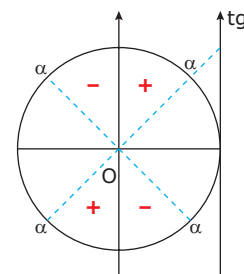
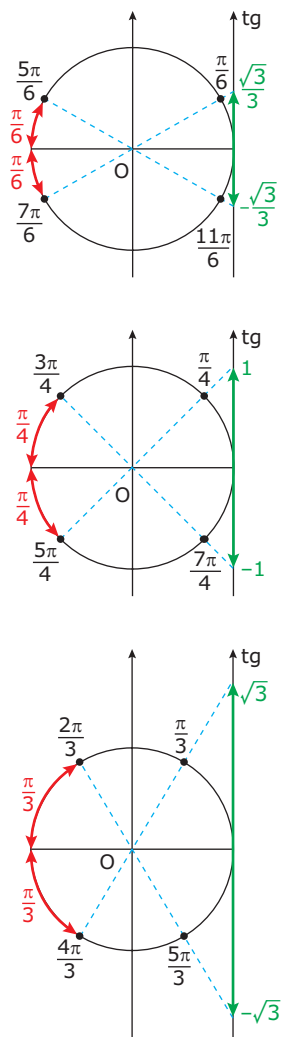
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$.

A função tangente é periódica, e seu período é π.

OBSERVAÇÃO

$$f(x) = \text{tg}\ (mx + n) \Rightarrow p = \frac{\pi}{|m|},\ m \neq 0$$

Sinal

Vamos estudar o sinal de tg α quando **P** (imagem de **α** no ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.

Valores notáveis

TANGENTES DE ARCOS CÔNGRUOS

Qualquer que seja o número real $\boldsymbol{\alpha}$, os arcos de medidas $\boldsymbol{\alpha}$ e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem **A** e a mesma extremidade **P**. Logo:

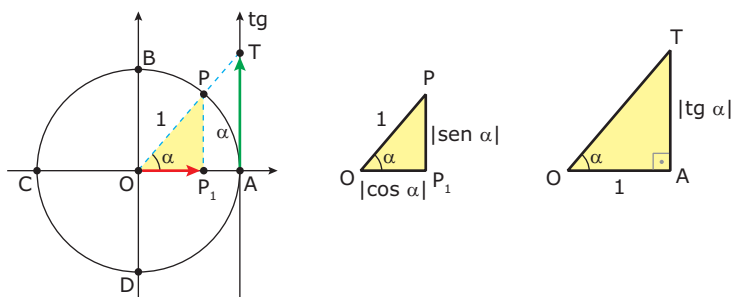
$$\text{tg}\ (\alpha + 2k\pi), = \text{tg}\ \alpha,\ \alpha \in D(\text{tg}),\ k \in \mathbb{Z}$$

Exemplos

1º) tg 1 080° = tg 720° = tg 360° = tg 0° = 0

2º) A determinação principal do arco de medida $\frac{38\pi}{3}$ rad mede $\frac{2\pi}{3}$ rad. Então: $\text{tg}\ \frac{38\pi}{3} = \text{tg}\ \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

RELAÇÃO ENTRE TANGENTE, SENO E COSSENO

Qualquer que seja $\alpha \in D(\text{tg})$, se $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, existem os triângulos retângulos OAT e OP_1P semelhantes. Logo:

$$\frac{AT}{P_1P} = \frac{OA}{OP_1} \Rightarrow \frac{|\text{tg}\ \alpha|}{|\text{sen}\ \alpha|} = \frac{1}{|\cos\alpha|} \Rightarrow |\text{tg}\ \alpha| = \frac{|\text{sen}\ \alpha|}{|\cos\alpha|}$$

A análise dos sinais de tg α, sen α e cos α e o estudo dos casos particulares nos permite concluir que:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

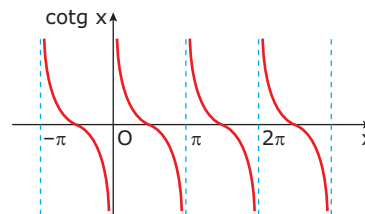
Função cotangente

Definiremos a função cotangente utilizando as funções seno e cosseno da seguinte forma:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como consequência imediata, temos:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha},\ \alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfico

A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$.

A função cotangente é periódica, e seu período é π.

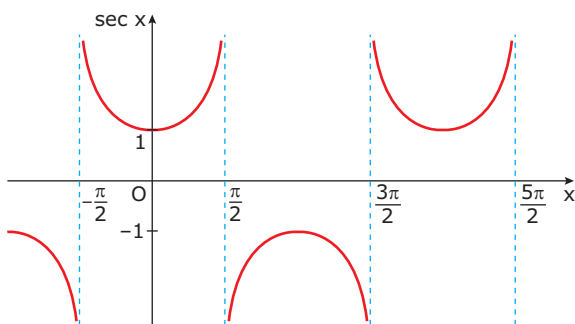
OBSERVAÇÃO

$$f(x) = \text{cotg}\ (mx + n) \Rightarrow p = \frac{\pi}{|m|},\ m \neq 0$$

Função secante

Definiremos a função secante utilizando a função cosseno, da seguinte forma:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfico

A imagem da função secante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

A função secante é periódica, e seu período é 2π.

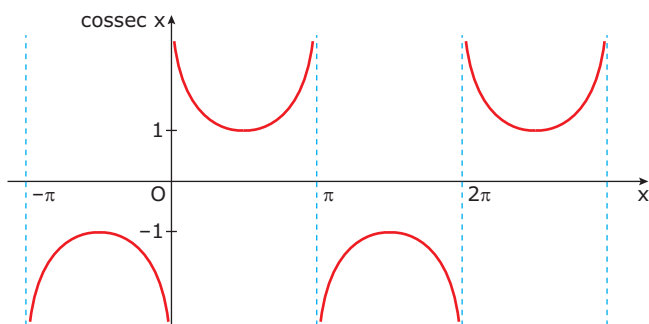
OBSERVAÇÃO

$$f(x) = \sec(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|m|},\ m \neq 0$$

Função cossecante

Definiremos a função cossecante utilizando a função seno, da seguinte forma:

$$\text{cossec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Gráfico

A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

A função cossecante é periódica, e seu período é 2π.

OBSERVAÇÃO

$$f(x) = \text{cossec}(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|m|},\ m \neq 0$$

RELAÇÃO ENTRE SECANTE E TANGENTE E ENTRE COSSECANTE E COTANGENTE

Dividindo os membros de $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$ por $\cos^2 \alpha$, sendo $\cos \alpha \neq 0$, temos:

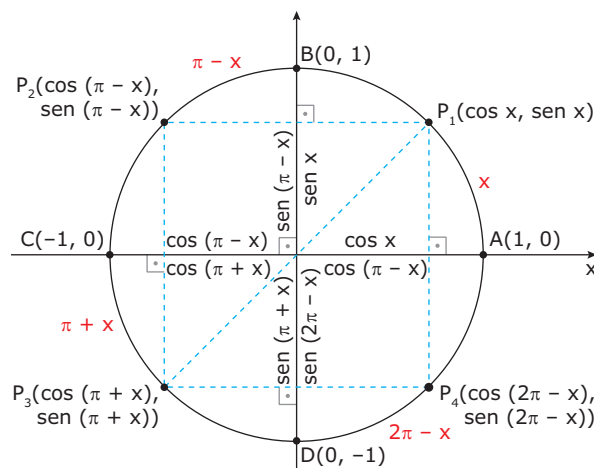
$$\frac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Analogamente, dividindo por $\text{sen}^2 \alpha$, sendo $\text{sen}\ \alpha \neq 0$, temos:

$$1 + \text{cotg}^2 \alpha = \text{cossec}^2 \alpha,\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Consideremos os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 simétricos no ciclo trigonométrico.

Se P_1 determina um arco de medida **x**, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então P_2, P_3 e P_4 determinam, respectivamente, arcos de medidas $\pi - x$, $\pi + x$ e $2\pi - x$.

Pelas definições de seno e de cosseno, temos:

$P_1(\cos x, \text{sen}\ x)$;

$P_2(\cos(\pi - x), \text{sen}(\pi - x))$;

$P_3(\cos(\pi + x), \text{sen}(\pi + x))$ e

$P_4(\cos(2\pi - x), \text{sen}(2\pi - x))$.

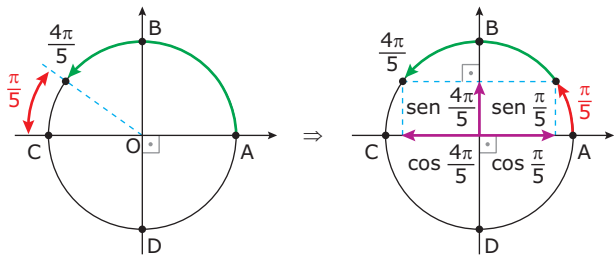
Aplicando as simetrias das coordenadas, obtemos:

Pontos	Abscissas	Ordenadas
P_1 e P_2	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen } x$
P_1 e P_3	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen } x$
P_1 e P_4	$\cos(2\pi - x) = \cos x$	$\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen } x$

Tais relações são válidas para todo número real **x**.

Exemplos

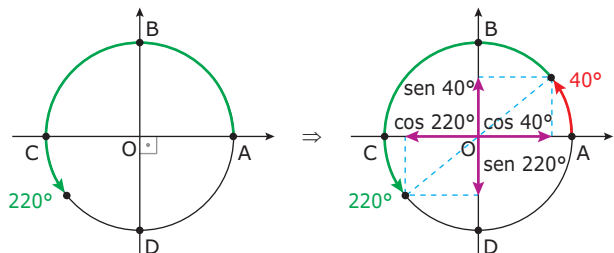
1º) Reduzindo $\frac{4\pi}{5}$ ao 1º quadrante, temos:

$$\text{sen}\frac{4\pi}{5} = \text{sen}\frac{\pi}{5};\ \cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5};$$

$$\text{tg}\frac{4\pi}{5} = \frac{\text{sen}\frac{4\pi}{5}}{\cos\frac{4\pi}{5}} = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{5}}{-\cos\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \text{tg}\frac{4\pi}{5} = -\text{tg}\frac{\pi}{5};$$

$$\text{cotg}\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{\text{tg}\frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{-\text{tg}\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \text{cotg}\frac{4\pi}{5} = -\text{cotg}\frac{\pi}{5};$$

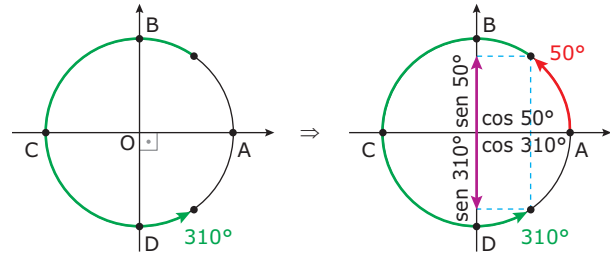
$$\sec\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{-\cos\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \sec\frac{4\pi}{5} = -\sec\frac{\pi}{5};$$

$$\text{cossec}\frac{4\pi}{5} = \frac{1}{\text{sen}\frac{4\pi}{5}} = \frac{1}{\text{sen}\frac{\pi}{5}} \Rightarrow \text{cossec}\frac{4\pi}{5} = \text{cossec}\frac{\pi}{5};$$

2º) Reduzindo 220° ao 1º quadrante, temos:

sen 220° = –sen 40°; cos 220° = –cos 40°;

tg 220° = tg 40°; cotg 220° = cotg 40°;

sec 220° = –sec 40°; cossec 220° = –cossec 40°;

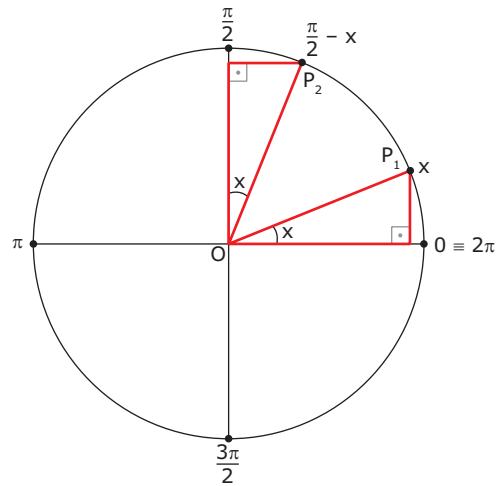
3º) Reduzindo 310° ao 1º quadrante, temos:

sen 310° = –sen 50°; cos 310° = cos 50°;

tg 310° = –tg 50°; cotg 310° = –cotg 50°;

sec 310° = sec 50°; cossec 310° = –cossec 50°;

RELAÇÕES ENTRE ARCOS COMPLEMENTARES

Considerando um arco de medida **x**, $0 < x < \frac{x}{2}$, sabemos que seu arco complementar tem medida $\frac{x}{2} - x$.

No ciclo trigonométrico, temos:

Pelas definições de seno e cosseno, temos:

$P_1(\cos x, \text{sen } x)$ e $P_2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$

Da congruência dos dois triângulos retângulos anteriores, obtemos:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \text{ e } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$$

Tais relações são válidas para todo número real **x**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Provar que $(1 + \text{cotg}^2\ x)(1 - \cos^2 x) = 1$ para todo **x** real, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Resolução:

$(1 + \text{cotg}^2\ x)(1 - \cos^2 x) = \text{cossec}^2\ (x).\text{sen}^2\ (x)$

$= \dfrac{1}{\text{sen}^2\ x}.\text{sen}^2\ x = 1$

02. Provar que $\text{tg}\ x + \text{cotg}\ x = \sec\ (x).\text{cossec}\ (x)$ para todo **x** real, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Resolução:

$\text{tg}\ x + \text{cotg}\ x = \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\ x} = \dfrac{\text{sen}^2\ x + \cos^2 x}{\cos x.\text{sen}\ x}$

$= \dfrac{1}{\cos x.\text{sen}\ x} = \dfrac{1}{\cos x}.\dfrac{1}{\text{sen}\ x}$

$= \sec\ (x).\text{cossec}\ (x)$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFTM-MG) Se $0 < x \leq \pi$ e $3 \cos (x) + \text{sen}\ (x) = 3$, pode-se afirmar que

A) $\text{tg}\ x < -1$

B) $-1 \leq \text{tg}\ x < -\dfrac{1}{2}$

C) $-\dfrac{1}{2} \leq \text{tg}\ x < \dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{1}{2} \leq \text{tg}\ x < 1$

E) $\text{tg}\ x \geq 1$

02. (UFOP-MG–2008) Se $\text{tg}\ x = a$, $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, é **CORRETO** afirmar que $\text{sen}\ (x) + \cos\ (x)$ vale

A) $\dfrac{-1-a}{\sqrt{1+a^2}}$

B) $\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}$

C) $\dfrac{1-a}{\sqrt{1+a^2}}$

D) $\dfrac{-1+a}{\sqrt{1+a^2}}$

03. (FUVEST-SP) Se **α** é um ângulo tal que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\ \alpha = a$, então $\text{tg}\ (\pi - \alpha)$ é igual a

A) $-\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

B) $\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

C) $\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

D) $-\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

E) $-\dfrac{1+a^2}{a}$

04. (Cesgranrio) Se $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{1}{3}$, então o valor de $\text{sen}\ (25\pi + \alpha) - \text{sen}\ (88\pi - \alpha)$ é

A) 0 B) $-\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{3}$ D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{2}{3}$

05. (UFJF-MG–2006) Dois ângulos distintos, menores que 360°, têm, para seno, o mesmo valor positivo. A soma desses ângulos é igual a

A) 45° B) 90° C) 180° D) 270° E) 360°

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (Unifor-CE) O valor de $\text{tg}\ 150° + 2\ \text{sen}\ 120° - \cos 330°$ é igual a

A) $\sqrt{3}$

B) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

E) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

02. (FUVEST-SP) Qual das afirmações a seguir é **VERDADEIRA**?

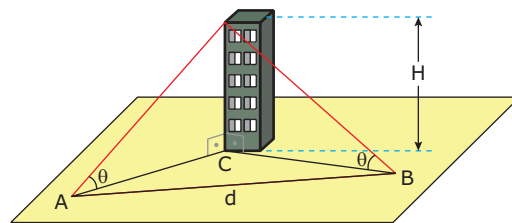
A) $\text{sen}\ 210° < \cos 210° < \text{tg}\ 210°$

B) $\cos 210° < \text{sen}\ 210° < \text{tg}\ 210°$

C) $\text{tg}\ 210° < \text{sen}\ 210° < \cos 210°$

D) $\text{tg}\ 210° < \cos 210° < \text{sen}\ 210°$

E) $\text{sen}\ 210° < \text{tg}\ 210° < \cos 210°$

03. (UFG-GO–2008) Dois observadores, situados nos pontos **A** e **B**, a uma distância **d** um do outro, como mostra a figura a seguir, avistam um mesmo ponto no topo de um prédio de altura **H**, sob um mesmo ângulo **θ** com a horizontal.

Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C$ também mede **θ** e desconsiderando a altura dos observadores, a altura **H** do prédio é dada pela expressão

A) $H = \dfrac{d}{2}\ \text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \cos \theta$

B) $H = d \cos \theta\ \text{sen}\ \theta$

C) $H = \dfrac{d}{2}\ \text{tg}\ \theta\ \text{sen}\ \theta$

D) $H = \dfrac{d}{2}\ \text{tg}\ \theta\ \sec \theta$

E) $H = d\ \text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \sec \theta$

04. (UEL-PR) A função dada por $f(x) = (\text{tg}\ x)(\text{cotg}\ x)$ está definida se, e somente se,

A) **x** é um número real qualquer.

B) $x \neq k2\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

C) $x \neq k\pi$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

D) $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

E) $x \neq \dfrac{k\pi}{4}$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

MATEMÁTICA

05. (Fatec-SP) Se **x** é um arco do 3º quadrante e cos x = $-\frac{4}{5}$, então cossec x é igual a

A) $-\frac{5}{3}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{3}$

06. (PUC Minas) O arco que tem medida **x** em radianos é tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e tg x = $-\sqrt{2}$. O valor do sen x é

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

07. (UEA-AM) Sabendo que sen x = $\frac{2}{3}$ e que **x** está no 1º quadrante, o valor de cotg x é

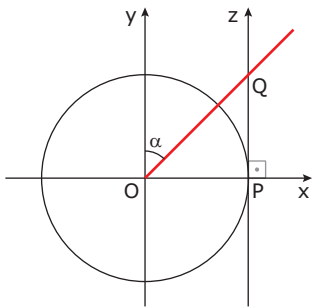
A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

08. (UFPA) Qual das expressões a seguir é idêntica a $\frac{1-\text{sen}^2(x)}{\text{cotg}(x)\,\text{sen}(x)}$?

A) sen x C) tg x E) cotg x
B) cos x D) cossec x

09. (UFRGS) Para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$. O valor de $(\text{tg}^2 x + 1)(\text{sen}^2 x - 1)$ é

A) –1 C) 1 E) $-\text{sec}^2 x$
B) 0 D) $\cos^2 x$

10. (UFRN) A figura a seguir é composta de dois eixos perpendiculares entre si, **x** e **y**, que se intersectam no centro **O** de um círculo de raio 1, e outro eixo **z**, paralelo a **y** e tangente ao círculo no ponto **P**. A semirreta OQ, com **Q** pertencente a **z**, forma um ângulo **α** com o eixo **y**.

Podemos afirmar que o valor da medida do segmento PQ é

A) sec α B) tg α C) cotg α D) cos α

11. (FUVEST-SP) O dobro do seno de um ângulo **θ**, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Logo, o valor de seu cosseno é

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. (Uscal-BA) Qualquer que seja o número real **x**, a expressão $\cos^4(x) - \text{sen}^4(x)$ é equivalente a

A) $\text{sen}^2(x) - 1$ D) $2 - \cos^2 x$
B) 2 (sen x)(cos x) E) (sen (x) + cos (x)).cos x
C) $2\cos^2 x - 1$

13. (Cesgranrio) Se **x** é ângulo agudo, tg (90° + x) é igual a

A) tg x C) –tg x E) 1 + tg x
B) cotg x D) –cotg x

SEÇÃO ENEM

01. O lucro mensal de uma empresa, em reais, é dado por:

$$L(t) = 10\,000 + \frac{1\,000}{\sec\left(\frac{\pi t}{6}\right)}$$

Em que **t** representa os meses do ano. O lucro dessa empresa, em reais, no mês de fevereiro, é de

A) 9 000 C) 10 000 E) 11 000
B) 9 500 D) 10 500

02. Carlos, administrador de empresas, está realizando um trabalho de pesquisa sobre duas empresas concorrentes **A** e **B**. Nesse trabalho, ele está usando várias informações sobre cada uma delas, como lucro mensal, quantidade de funcionários e de clientes.

O lucro ao longo de um ano de cada empresa, em milhares de reais, é fornecido pela seguinte função do tempo **t**, em meses, sendo t = 1 correspondente ao mês de janeiro:

$$L_A(t) = 200 + 50.\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

$$L_B(t) = 300 - 50.\text{cossec}\left(\frac{\pi t}{24}\right)$$

O orientador do trabalho de pesquisa de Carlos pediu para ele fazer uma análise mensal sobre os lucros de cada uma das empresas. Portanto, Carlos poderá afirmar que, no mês de abril,

A) a empresa **A** lucrou R$ 20 000,00 a mais que a empresa **B**.
B) a empresa **B** lucrou R$ 20 000,00 a mais que a empresa **A**.
C) a empresa **A** lucrou R$ 25 000,00 a mais que a empresa **B**.
D) a empresa **B** lucrou R$ 25 000,00 a mais que a empresa **A**.
E) as duas empresas tiveram lucros iguais.

GABARITO

Fixação

01. D 02. A 03. A 04. A 05. C

Propostos

01. E 04. D 07. E 10. C 13. D
02. B 05. A 08. B 11. B
03. D 06. D 09. A 12. C

Seção Enem

01. D 02. C